

THESES

PRESENTEES

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE CLERMONT

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre-Yves BERTIN

Attaché de Recherches au C.N.R.S.

PREMIERE THESE - Etude théorique et expérimentale d'un
faisceau de photons de rayonnement de
freinage durci en énergie

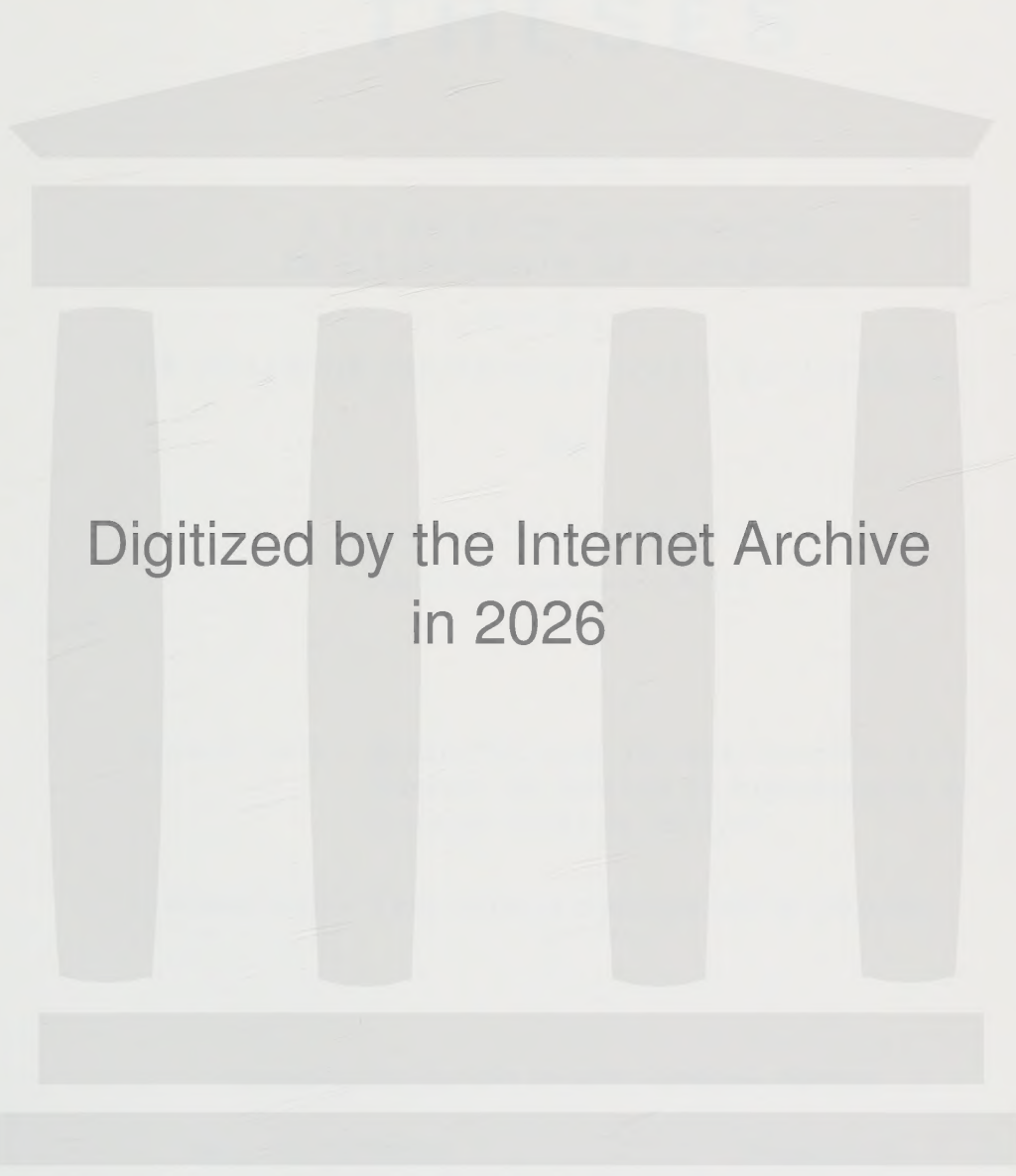
DEUXIEME THESE - Propositions données par la Faculté

Soutenues le 12 juillet 1966 devant la Commission d'Examen

MM. E. DUBOIS Président

R. HOFSTADTER
Mme M. AVAN.....
D. ISABELLE
L. AVAN.....

} Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546608_0017

THESES

PRESENTEES

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE CLERMONT

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre-Yves BERTIN

Attaché de Recherches au C.N.R.S.

PREMIERE THESE - Etude théorique et expérimentale d'un
faisceau de photons de rayonnement de
freinage durci en énergie

DEUXIEME THESE - Propositions données par la Faculté

Soutenues le 12 juillet 1966 devant la Commission d'Examen

MM. E. DUBOIS Président

R. HOFSTADTER	}	Examineurs
Mme M. AVAN.....		
D. ISABELLE		
L. AVAN.....		

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE CLERMONT-FERRAND

Doyen : Mr ROQUES Maurice

1er Assesseur : Mr SAUREL Jean

2ème Assesseur : Mr RAOULT Gaston

Professeurs :

M.	DUBOIS Emmanuel	Physique	T
M.	RAMBAUD René	Chimie	T
M.	BLANC Eugène	Mécanique Rationnelle	T
M.	ROQUES Maurice	Géologie - Minéralogie	T
M.	LAPADU-HARGUES Pierre	Minéralogie	T
M.	TRUFFAULT Robert	Chimie Organique	T
M.	LUTZ Hubert	Biologie Animale	T
M.	RAOULT Gaston	Physique	T
M.	CHAMPAGNAT Paul	Physiologie Végétale	T
M.	DUPLESSIS-KERGOMARD Alain	Chimie	T
M.	AVAN Louis	Physique Expérimentale	T
M.	PARIAUD Jean-Charles	Chimie Physique	T
Mme	HENNEQUIN Françoise	Mathématiques	T
Mlle	BERTHET Ginette	Physique	T
M.	LOISEAU Jean	Botanique Pure et Appliquée	T
M.	COMBE René	Physique	T
M.	de PUYTORAC Pierre	Biologie - Zoologie	T
Mme	AVAN Madeleine	Physique	T
Mlle	DONDON Marie-Louise	Chimie Physique	T
M.	DELOST Paul	Physiologie Animale	T
M.	SAUREL Jean	Physique	T
M.	VIALARD André	Chimie Physique	T
M.	KOLHMULLER Robert	Chimie Minérale	T

Professeur Associé

M.	BALANZAT	Mathématiques
----	----------	---------------

Professeurs sans chaire

M. PETERLONGO Jean-Marc	Géologie
M. BAILLAUD Lucien	Botanique
M. VESSIERE Roger	Chimie
M. GUILLAUME Marcel	Mathématiques
M. BATHIER Marcel	Physique
Mlle DUCHER Suzanne	Chimie
M. HENNEQUIN Paul	Mathématiques

Maîtres de Conférences

M. MAISONNEUVE Jacques	Géologie Appliquée
M. CAPESTAN Michel	Chimie Minérale
M. MARTINET Pierre	Chimie
M. ROCHE Jean-Etienne	Physique
M. THOMAS Jean	Physique
M. LENOIR Marcel	Mathématiques
M. FALGAS Maurice	Mathématiques
M. BERNARD Maurice	Physique
M. ISABELLE Didier	Physique
Mme LE DOUARIN Nicole	Biologie Animale
M. COLLEAU Jean	Mathématiques
M. JOYON Louis	Zoologie

Maître de Conférences Associé

M. VO-KHAC-KHOAN	Mathématiques
------------------	---------------

Attachée Principale

Mme CHOPART Marie-Louise

Je remercie Monsieur le Doyen DUBOIS, Président du Jury de thèse, et Monsieur le Professeur HOFSTADTER, Prix Nobel de Physique, de l'Honneur qu'ils me font aujourd'hui.

Monsieur le Professeur AVAN m'a accueilli au Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences de Clermont où il m'a prodigué sans cesse aide et encouragement dans la réalisation et la rédaction de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde et respectueuse reconnaissance.

Madame le Professeur AVAN m'a proposé mon deuxième sujet de thèse et conseillé dans son élaboration, Monsieur le Professeur ISABELLE a dirigé les expositions auprès de l'Accélérateur Linéaire d'Orsay et suivi avec intérêt la préparation de ce mémoire. Je leur exprime toute ma reconnaissance.

Je remercie,

Monsieur le Professeur GREGORY qui a bien voulu accepter d'être mon parrain de recherches depuis mon entrée au Centre National de la Recherche Scientifique.

Monsieur le Directeur Général du Centre National de la Recherche Scientifique pour l'allocation d'études et l'aide efficace qui m'ont permis d'effectuer mon travail de recherche dans de bonnes conditions.

Monsieur le Professeur BLANC-LAPIERRE qui a mis à ma disposition les facilités du Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire d'Orsay. Je tiens à exprimer mes remerciements à tous les collaborateurs de l'Accélérateur Linéaire où la partie expérimentale a été exécutée et en particulier au Docteur G.R. BISHOP, et MM. L. BURNO et JEANJEAN.

Monsieur le Professeur GOLDEMBERG de l'Université de Sao Paulo et le Docteur MAXIMON de l'International Bureau of Standards, Washington, pour les discussions fructueuses relatives à l'analyse des résultats expérimentaux.

Monsieur le Professeur CUER, Directeur du Département de Physique Corpusculaire du Centre de Recherches Nucléaires de Strasbourg-Cronenbourg, et tous les chercheurs de ce Laboratoire.

Le Laboratoire de Calcul Numérique de la Faculté des Sciences de Clermont que dirige Monsieur le Professeur HENNEQUIN et en particulier Monsieur BOUDEAUD pour l'aide efficace qu'ils m'ont apportée dans la préparation des calculs.

Tous mes camarades de Laboratoire.

Mle Guittard qui a réalisé la dactylographie du mémoire.

Que tous reçoivent le témoignage de ma profonde reconnaissance.

A mes camarades

J. FAIN

J. GARDES

A. FLEURY

G. GUITTARD

R. SCHAUMBURG

J. AUGERAT

J. CASTOR

J. BERTHOT

pour leur travail d'équipe

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
I - RAYONNEMENT DE FREINAGE D'UN ELECTRON ET MATERISALISATION D'UN PHOTON EN UN POSITON ET UN NEGATON	5
§ I - Définition des phénomènes et notations	6
§ II- Introduction des sections efficaces	9
§III- Approximation de Born	13
1. <i>Sections efficaces différentielles</i>	13
2. <i>Intégration sur les angles</i>	15
3. <i>L'effet d'écran sur les électrons atomiques</i>	16
4. <i>Contributions apportées par les électrons atomiques</i>	19
§ IV- Correction de Coulomb	22
1. <i>Effet d'écran</i>	25
2. <i>Le rayonnement de freinage et la matérialisation dans le champ des électrons atomiques</i>	26
§ V - Ouverture angulaire d'une paire de matérialisation	27
§ VI- Formules utilisées dans l'analyse expérimentale des résultats	31
II - DIFFUSION COULOMBIENNE MULTIPLE	34
§ I - Généralités	34
§ II- Notations	35
§III- Diffusion coulombienne simple	36
§ IV- Diffusion coulombienne multiple	38
1. <i>Théorie simplifiée</i>	39
2. <i>Théorie de Goudsmith et Sanderson et théorie de Molière</i>	40
§ V - Equation de transport et méthode de Lohrman	42
III - CALCUL DU SPECTRE DE PHOTONS	49
§ I - Généralités	49
§ II- Calcul du spectre "durci"	53
1. <i>Spectre de photons à la sortie du radiateur</i>	53
2. <i>Etude des phénomènes prenant naissance dans l'hydruure de lithium</i>	53
3. <i>Conduite des calculs</i>	58
4. <i>Résultats</i>	58
5. <i>Phénomènes négligés</i>	58

IV -	MONTAGE EXPERIMENTAL	61
§ I -	Extraction et analyse du faisceau dévié	61
§ II-	Montage expérimental	63
	1. <i>Obtention du flux de photons primaires</i>	63
	2. <i>Filtrage du faisceau de photons</i>	64
	3. <i>Détection</i>	65
§III-	Mesure de la charge transportée par le faisceau d'électrons	66
§ IV-	Traitement des émulsions après exposition	67
V -	METHODE DE MESURES	68
§ I -	Méthode parallèle - Méthode perpendiculaire	68
§ II-	Analyse des événements	72
	1. <i>Recherche systématique des événements de matérialisation</i>	72
	2. <i>Mesure de l'ouverture angulaire de la paire</i>	73
	3. <i>Détermination de K : incertitude sur $\hat{\omega}$</i>	74
	4. <i>Résultats obtenus</i>	76
	5. <i>Résultats et discussion des résultats</i>	77
VI -	METHODE D'ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX	78
§ I -	Notations utilisées	78
§ II-	But et méthode	79
§III-	Diffusion coulombienne multiple - Rayonnement de freinage	80
§ IV-	Ouverture angulaire initiale : $\vec{u}$, contribution de la diffusion coulombienne multiple et du rayonnement de freinage : $\vec{r}$	82
	1. <i>Choix de Ω</i>	83
	2. <i>Développement de $n(\vec{r} - \vec{\omega})$ et de $n_i(\omega)$</i>	83
	3. <i>Calcul de $I_{1,i}$ et $I_{2,i}$</i>	86
§ V -	Formules obtenues en se limitant au premier ordre	87
§ VI-	Intégration sur a	89
§VII-	Résultats - Spectre d'ouverture angulaire initiale	91
VII -	CALCUL DU SPECTRE D'OUVERTURE ANGULAIRE A L'AIDE DES FORMULES PRECEDEMMENT ETABLIES	92
§ I -	Données expérimentales	92
§ II-	Calcul de $\mathcal{N}_1(\hat{u})$ et $\mathcal{N}_2(\hat{u})$	93
	1. <i>Forme simplifiée de l'équation (2) donnant $i(\hat{u})$</i>	94
	2. <i>Conduite des calculs</i>	95
§III-	Conclusion	97

VIII - COMPARAISON DES RESULTATS DES CALCULS ET DES RESULTATS EXPERIMENTAUX	100
§ I - Evaluation de la charge nécessaire à l'irradiation	100
§ II - Comparaison des résultats	102
§ III- Conclusion	104
CONCLUSION	107

Une grande simplification est introduite dans les formules de l'électrodynamique si nous utilisons pour unités fondamentales certaines grandeurs qui sont des constantes de la nature. Nous utiliserons ici le système d'unité dit "naturel"* qui consiste à prendre pour unités fondamentales :

1. La vitesse de la lumière : c
2. La constante de Planck divisée par 2π : $\hbar = \frac{h}{2\pi}$
3. Une unité arbitraire et conventionnelle de longueur qui sera le cm.

On passe aisément du système naturel au système légal S.I. si nous exprimons les unités de ce dernier système en fonction de l'autre. Ainsi si nous notons par $(f(c, \hbar))$ les valeurs de la fonction $f(c, \hbar)$ dans le système S.I.

$$\left[(c) \simeq 3.10^8 \quad ; \quad (\hbar) = (h/2\pi) \simeq 1.10^{-34} \quad ; \quad (cm) = 10^{-2} \right]$$

Les équations de transformation sont :

$$1 \text{ . m} = \left(\frac{1}{cm} \right) \cdot cm$$

$$1 \text{ . Kg} = \left(\frac{cm \cdot c}{\hbar} \right) cm^{-1} \cdot c^{-1} \hbar$$

$$1 \text{ . sec} = \left(\frac{c}{cm} \right) cm \cdot c^{-1}$$

La charge électrique a la dimension $c^{\frac{1}{2}} \hbar^{\frac{1}{2}}$ dans le système fondamental.

Dans le système S.I. la valeur de la charge de l'électron a la valeur approximative

$$|e| = \sqrt{\frac{4\pi}{137}} \cdot c^{\frac{1}{2}} \hbar^{\frac{1}{2}}$$

* Ce système "naturel" est adopté traditionnellement dans les traités de Mécanique Quantique et d'Electrodynamique quantique.

I N T R O D U C T I O N

La réalisation d'expériences de photoproduction ou de photodésintégration pose le problème de l'obtention d'un faisceau de photons dont le spectre en énergie est bien connu. Dans la plupart des cas ces faisceaux sont obtenus par rayonnement de freinage des électrons dans la matière. Ce phénomène présente l'inconvénient de fournir un spectre continu auquel se trouvent associés des effets parasites dus aux cascades électrophotoniques. Les calculs théoriques relatifs à ces effets sont longs et fastidieux et leur vérification expérimentale est limitée par les problèmes posés par la détection directe du photon.

Le travail exposé dans ce mémoire a pour but :

- l'étude théorique d'un faisceau de photons relevé vers les hautes énergies
- sa mise au point expérimentale
- la définition d'une méthode de spectrométrie gamma dont l'application permet une vérification des diverses hypothèses utilisées dans l'étude théorique du faisceau.

Cet ensemble devient le point de départ d'une expérience de photoproduction de mésons π^+ et π^0 dans l'hydrogène au voisinage du seuil.

Deux contraintes nous sont imposées :

- l'énergie maximale des photons utilisés doit être supérieure à "l'énergie-seuil" (155 MeV) pour la photoproduction des mésons. Nous avons choisi pour énergie maximale des photons : $k_{\max} = 200 \text{ MeV}$.

- la vocation du Laboratoire de Physique Nucléaire de Clermont implique l'emploi de l'émulsion photographique nucléaire comme technique expérimentale.

* Avant d'exposer notre travail nous croyons utile de consacrer deux premiers chapitres à la théorie des phénomènes de rayonnement de freinage des électrons, de matérialisation des photons en paire positon-négaton et des problèmes de diffusion coulombienne multiple. Au cours de cet exposé de synthèse nous discutons certaines approximations.

* Nous étudions dans le Chapitre III les différentes solutions qui permettent d'obtenir un faisceau de photons. Nous avons décidé d'utiliser le rayonnement de freinage d'électrons monocinétiques. Ce rayonnement de freinage est "durci" par absorption des photons de basse énergie dans une colonne d'hydruure de lithium. L'emploi d'un tel dispositif nécessite alors le calcul de la cascade électrophotonique qui prend naissance dans la colonne. Nous exposons la méthode simple employée pour effectuer ce calcul, et cela dans diverses hyptohèses.

* Le Chapitre IV est consacré à la description de la "construction du faisceau et du mode expérimental utilisé.

* Nous devons définir une méthode expérimentale qui satisfasse aux conditions suivantes :

- posséder une bonne résolution dans le domaine des hautes énergies qui est celui des phénomènes à étudier ;
- permettre des mesures simples et rapides, pour pouvoir obtenir une statistique suffisante en un temps raisonnable ;
- être compatible avec l'emploi des émulsions photographiques nucléaires.

Nous sommes ainsi amenés à choisir la matérialisation du photon en paire "négaton-positon" comme réaction d'analyse. En effet, sa section efficace est grande

et croît avec l'énergie des photons : d'où une bonne résolution dans la région du spectre où le nombre de photons est faible ; de plus la théorie du phénomène est relativement bien connue.

Nous devons maintenant choisir la grandeur liée à la réaction de matérialisation que nous devons mesurer et qui nous permettra de vérifier de manière simple le spectre des photons. De nombreux auteurs ont effectué des mesures de diffusion coulombienne multiple sur chaque trajectoire d'électrons de manière à obtenir l'énergie de chacun d'eux et par là-même l'énergie du photon incident. *Mais ces mesures sont longues et fastidieuses et présentent l'inconvénient d'introduire des erreurs systématiques dues à la perte d'événement de faible énergie.* Aussi avons-nous choisi de mesurer l'angle d'ouverture de la paire ; cette grandeur est liée à l'énergie du photon (Etude théorique d'Olsen).

Cette technique engage des phénomènes de distorsion introduits par la diffusion coulombienne multiple et le rayonnement de freinage des électrons dans l'émulsion nucléaire. Pour les éliminer nous sommes amenés à définir une nouvelle méthode d'irradiation dite "méthode perpendiculaire" par opposition aux méthodes précédemment employées dans lesquelles le faisceau de photons est parallèle au plan de l'émulsion nucléaire. Nous exposons dans le Chapitre V comment notre méthode, tout en étant plus sûre et très rapide, permet d'éliminer les erreurs systématiques.

* Dans les Chapitres VI et VII nous décrivons le traitement qu'il faut appliquer aux données brutes pour éliminer l'influence de la diffusion coulombienne multiple et du rayonnement de freinage. Ceci nécessite la mesure de l'angle d'ouverture observé à deux distances x_1 et x_2 du point où se fait la matérialisation.

la déformation des spectres obtenus dans le passage d'une distance de mesure à l'autre permet de remonter au spectre à l'origine.

* La cohérence des calculs de dégénérescence du faisceau de photons dans la colonne d'hydruure de lithium dans les diverses hypothèses est vérifiée au Ch. VIII par comparaison du spectre expérimental avec le résultat de la convolution des spectres de photons et de la section efficace différentielle en ouverture angulaire de la matérialisation des photons.

* Enfin, dans la conclusion nous présentons un bilan général des résultats obtenus et quelques perspectives d'application expérimentale de ceux-ci.

CHAPITRE I

RAYONNEMENT DE FREINAGE D'UN ELECTRON ET MATERIALISATION D'UN PHOTON
EN UN POSITON ET UN NEGATON

Les phénomènes qui nous intéressent mettent en présence des photons, des électrons ou des champs de rayonnement. La description de ces phénomènes est l'objet de l'électrodynamique quantique. Cette théorie fait intervenir des champs libres : champ de Dirac pour les négatons et positons, champ de Maxwell pour les photons et le champ de rayonnement. L'interaction de ces champs entre eux dépend d'une très faible constante de couplage $\alpha = e^2 = \frac{1}{137}$ (e est la valeur absolue de la charge de l'électron) dite "constante de structure fine". Cette théorie n'a pu se développer qu'avec l'utilisation d'une approximation qui consiste à garder un certain nombre de termes seulement du développement de la matrice d'interaction en série de puissances de la constante de couplage.

La série entière décrit la totalité des interactions qui peuvent intervenir entre les particules de l'état initial ; chaque terme de la série représente un phénomène physique ou encore une interaction particulière.

L'élément de matrice décrivant la transition dans une interaction déterminée, - un terme d'un ordre déterminé de la série - s'écrit suivant la méthode de FEYNMAN^(1,2,3) à partir de "diagrammes" ; les diagrammes de Feynman associés à une interaction déterminée représentent des processus chronologiquement différents par l'ordre des connexions internes, mais indiscernables physiquement ; il faut donc ajouter les amplitudes calculées à partir de divers diagrammes d'un même ordre, car seule leur somme a physiquement un sens.

§ I - Définition des phénomènes et notations

La majeure partie du travail expérimental que nous effectuons fait appel aux deux phénomènes suivants :

- Rayonnement de freinage d'un électron
- Matérialisation d'un photon en deux électrons.

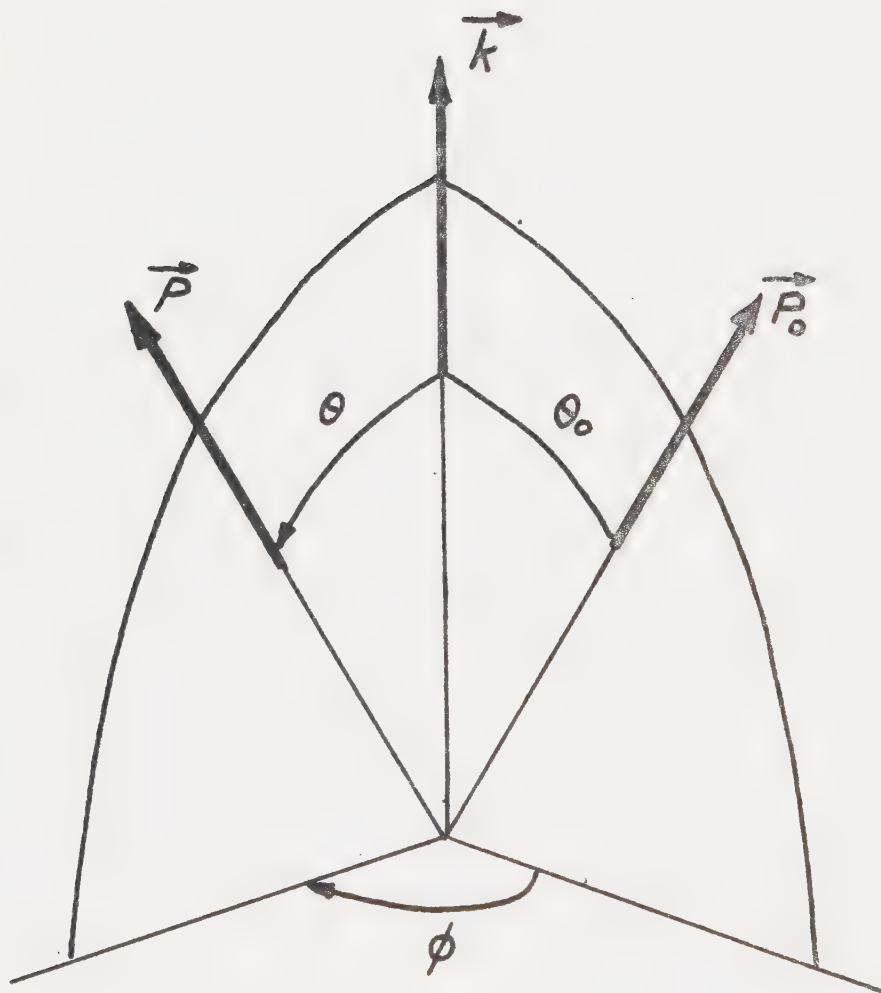
Nous allons dans ce Chapitre indiquer les différentes manières d'aborder ces phénomènes du point de vue théorique.

Lorsqu'un électron (énergie totale E_0 , quantité de mouvement $\vec{p}_0$) est soumis à l'action d'un champ électromagnétique, il peut émettre un photon (énergie k , quantité de mouvement $\vec{k}$) ; le passage de l'électron initial à l'électron final (énergie E , quantité de mouvement $\vec{p}$) par émission d'un photon, est connu sous le nom de rayonnement de freinage d'un électron.

La matérialisation d'un photon en une paire négaton-positon, est un phénomène directement lié à la théorie de Dirac. En effet une particule relativiste d'énergie supérieure à deux fois la masse de l'électron, par exemple un photon (énergie k , quantité de mouvement $\vec{k}$) en présence d'un champ électromagnétique excite un électron d'énergie négative et l'amène à un état d'énergie positive. Le phénomène apparaît comme la production d'un électron négatif (énergie E_- , quantité de mouvement $\vec{p}_-$) et d'un électron positif (énergie E_+ , quantité de mouvement $\vec{p}_+$).

Ces deux phénomènes nécessitent la présence d'un champ électromagnétique créé par exemple par un noyau de charge Ze . Dans bien des cas, le noyau peut être considéré comme ponctuel et infiniment lourd devant la masse de l'électron.

FIGURE 1



R.F

- Notations employées dans l'évaluation des éléments de matrice de transition pour le rayonnement de freinage

Nous allons maintenant préciser nos notations :

m_0 est la masse au repos de l'électron

r_0 est le rayon classique de l'électron

e est la valeur absolue de la charge de l'électron.

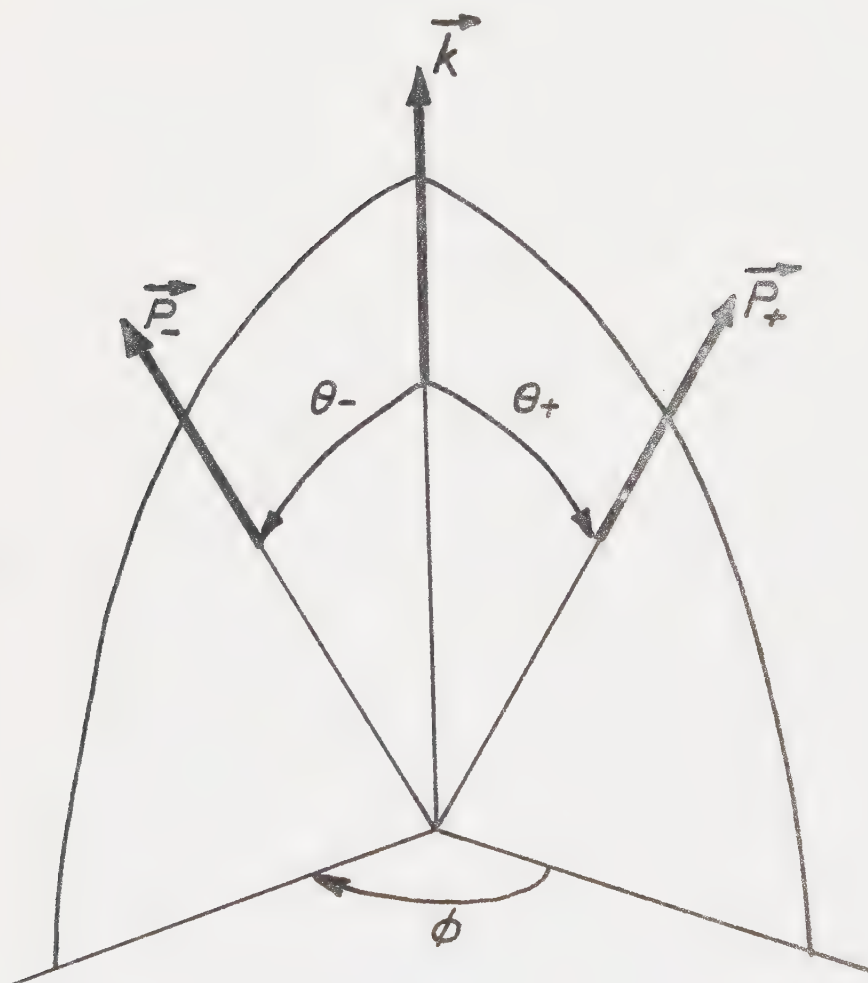
A/ Pour le rayonnement de freinage (les formules relatives à ce phénomène sont suivies du sigle R.F.) - Figure 1

PHOTON	$\left[\begin{array}{l} \text{Quantité de mouvement : } \vec{k} \\ \text{Energie : } k \\ \text{Elément d'angle solide d'émission : } d\Omega_k \end{array} \right.$
ELECTRON INCIDENT	$\left[\begin{array}{l} \text{Quantité de mouvement : } \vec{p}_0 \\ \text{Energie : } E_0 \\ \text{Angle } (\vec{p}_0, \vec{k}) = \theta_0 \end{array} \right.$
ELECTRON SORTANT	$\left[\begin{array}{l} \text{Quantité de mouvement : } \vec{p} \\ \text{Energie : } E \\ \text{Angle } (\vec{p}, \vec{k}) = \theta \\ \text{Elément d'angle solide d'émission : } d\Omega \end{array} \right.$
NOYAU	$\left[\begin{array}{l} \text{Quantité de mouvement : } \vec{q} \\ \text{Masse : infiniment lourde devant celle de l'électron,} \\ \text{sauf indication contraire} \\ \text{Charge : } Ze \end{array} \right.$

L'angle ϕ est l'angle des plans définis par les lignes de vol d'un électron et du photon.

La conservation des quantités de mouvement implique : $\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{k} + \vec{q}$;
et celles des énergies : $E_0 = E + k$.

FIGURE 2



$P_- P$

- Notations employées dans l'évaluation des éléments de matrice de transition pour la matérialisation (e^+ , e^-)

B/ Pour la production de paire d'électrons (les formules relatives à ce phénomène sont suivies du sigle P.P) - Figure 2

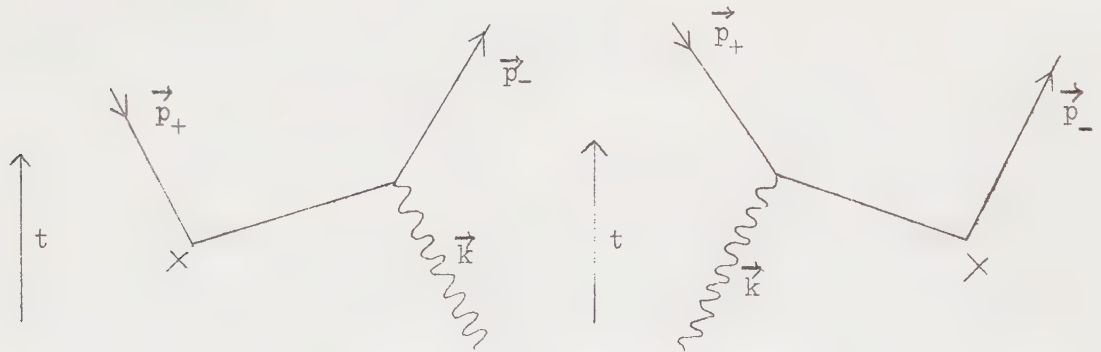
PHOTON	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Quantité de mouvement : } \vec{k} \\ \text{Energie : } k \end{array} \right.$
ELECTRON POSITIF	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Quantité de mouvement : } \vec{p}_+ \\ \text{Energie : } E_+ \\ \text{Angle entre : } (\vec{p}_+, \vec{k}) = \theta_+ \\ \text{Elément d'angle solide d'émission : } d\Omega_+ \end{array} \right.$
ELECTRON NEGATIF	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Quantité de mouvement : } \vec{p}_- \\ \text{Energie : } E_- \\ \text{Angle } (\vec{p}_-, \vec{k}) = \theta_- \\ \text{Elément d'angle solide d'émission : } d\Omega_- \end{array} \right.$
NOYAU	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Quantité de mouvement : } \vec{q} \\ \text{Masse : infiniment lourde devant celle de l'électron,} \\ \quad \text{sauf indication contraire} \\ \text{Charge : } Ze \end{array} \right.$

L'angle ϕ est l'angle des plans définis par des lignes de vol d'un électron et du photon.

La conservation des quantités de mouvement implique : $\vec{k} = \vec{p}_+ + \vec{p}_- + \vec{q}$;
et celle des énergies : $k = E_+ + E_-$.

§ II - Introduction des sections efficaces

Les deux phénomènes physiques (R.F. et P.P.) sont reliés étroitement l'un à l'autre : en effet les diagrammes de production de paire dans un champ externe sont les suivants :

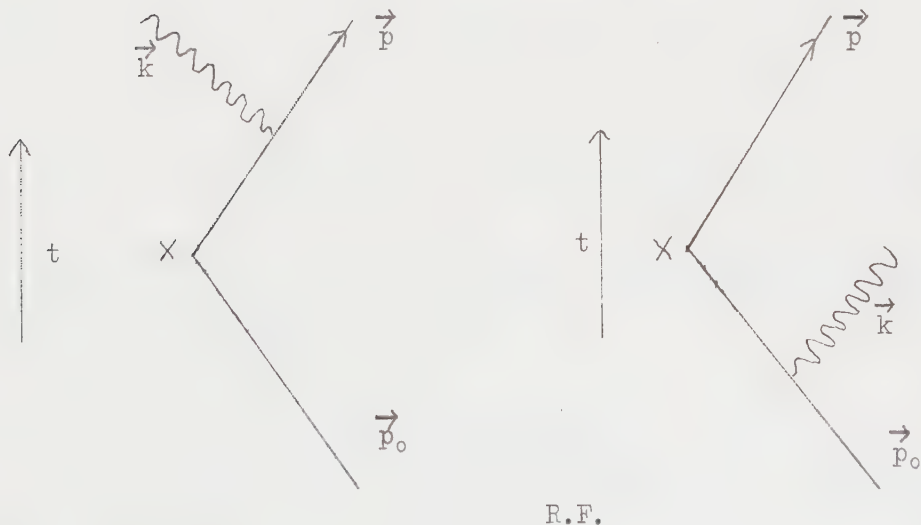


Le photon crée une paire et le positon interagit avec le champ externe

P.P.

Le photon crée une paire et le négaton interagit avec le champ externe

Tandis que ceux du rayonnement de freinage sont :



R.F.

L'électron interagit avec le champ externe puis émet un photon

L'électron émet un photon puis interagit avec le champ externe

Ces deux types de diagrammes présentent une symétrie évidente.

Ayant calculé par exemple, les éléments de matrice du rayonnement de freinage, nous obtiendrons ceux de la matérialisation en remarquant que le "photon sortant" devient un "photon entrant" et le "négaton entrant" devient un "positon sortant". Soit symboliquement :

$$(\vec{k})_{\text{RF}} \longrightarrow (-\vec{k})_{\text{PP}} \qquad (\vec{p})_{\text{RF}} \longrightarrow -(\vec{p}_+)_{\text{PP}}$$

Par la suite nous raisonnerons sur le phénomène de rayonnement de freinage, mais nous donnerons, dans la mesure du possible, les sections efficaces pour les deux types d'événement.

La section efficace $d\sigma$ du rayonnement de freinage pour l'émission d'un seul photon dans un grand volume cubique de côté L est donnée par le quotient de la probabilité de transition par atome et par électron, et de la vitesse de l'électron entrant (vitesse : $v_0 = p_0/E_0$).

De même la section efficace de production d'une paire positon-négaton par un photon dans un grand volume cubique sera donnée par le quotient de la probabilité de transition par atome et par photon, et de la vitesse de la lumière. La section étant exprimée en cm^2 nous avons :

$$d\sigma = \omega \left(\frac{1}{m_0} \right)^3 \cdot L^3 \qquad (1)_{\text{PP}}$$

et

$$d\sigma = \omega \left(\frac{E_0}{p_0} \right) \cdot \left(\frac{1}{m_0} \right)^3 \cdot L^3 \qquad (1)_{\text{RF}}$$

avec

$$\omega = 2\pi \cdot \rho_f \cdot |H_{if}|^2 \qquad (2)$$

où ρ_f est la densité d'état final qui peut s'écrire :

$$\rho_f = \frac{1}{(2\pi)^6 \cdot m_0^4} \cdot (p_E k^2 \cdot d k \cdot d\Omega_k \cdot d\Omega_L^6) \quad (3)_{RF}$$

et

$$\rho_f = \frac{1}{(2\pi)^6 \cdot m_0^4} \cdot (p_+ E_+ p_-^2 dE_+ \cdot d\Omega_- \cdot d\Omega_+ \cdot L^6) \quad (3)_{PP}$$

Le terme $|H_{if}|$ est l'élément de matrice de la transition du système de l'état initial à l'état final ; cette quantité s'écrit⁽⁴⁾ :

$$|H_{if}|^2 = \left(\frac{2\pi e^2}{k}\right) m_0 \cdot \left| \int \psi_f^* \cdot (\vec{e} \cdot \vec{\alpha}) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \psi_i d\tau \right|^2 L^{-9} \quad (4)_{RF}$$

$$|H_{if}|^2 = \left(\frac{2\pi e^2}{k}\right) m_0 \cdot \left| \int \psi_f^* \cdot (\vec{e} \cdot \vec{\alpha}) e^{+i \vec{k} \cdot \vec{r}} \psi_i d\tau \right|^2 L^{-9} \quad (4)_{PF}$$

Dans cette expression $\vec{e}$ est le vecteur unité de polarisation du photon, $\vec{\alpha}$ le vecteur matrice de Dirac et ψ_i , ψ_f sont respectivement les fonctions d'onde de Dirac pour l'électron initial et final.

Les sections efficaces seront donc :

$$d\sigma = \frac{137 \cdot Z_0^2}{(2\pi m_0)^4} \cdot \frac{E_+ p_- E}{p_0} \cdot \left| \int \psi_f^* \cdot (\vec{e} \cdot \vec{\alpha}) \exp^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \psi_i d\tau \right|^2 k dk \cdot d\Omega_k \cdot d\Omega \quad (5)_{RF}$$

$$d\sigma = \frac{137 \cdot Z_0^2}{(2\pi m_0)^4} \cdot \frac{E_+ p_-^2}{k} \cdot \left| \int \psi_f^* \cdot (\vec{e} \cdot \vec{\alpha}) \exp^{+i \vec{k} \cdot \vec{r}} \psi_i d\tau \right|^2 p_+ \cdot dE_+ \cdot d\Omega_- \cdot d\Omega_+ \quad (5)_{PP}$$

L'élément de matrice $|H_{if}|$ contenant toute l'information relative aux fonctions d'onde en interaction, est la quantité dont l'évaluation est délicate. Celle-ci peut se faire de deux manières différentes :

1. Dans l'approximation de Born où les fonctions d'onde des électrons incidents et diffusés sont celles des particules libres (ondes planes). Cette méthode sera valable pour des énergies relativement élevées et pour les éléments légers⁽⁵⁾.

2. Avec l'utilisation des fonctions d'onde solutions approchées de l'équation de Dirac avec potentiel coulombien. Solutions approchées seulement puisque, mis à part les solutions numériques exactes obtenues par des méthodes de déphasage et inutilisables ici pour des raisons que nous verrons par la suite, le problème n'a pas de solution analytique exacte^(6,7).

Nous divisons donc notre travail en deux parties correspondant respectivement à ces deux méthodes d'évaluation de $|H_{if}|$. Dans chacune de ces parties, nous donnons les sections efficaces différentielles et intégrées, puis nous considérons le problème de l'effet d'écran des électrons atomiques masquant en tout ou en partie le champ coulombien du noyau. Nous regardons les contributions apportées à la matérialisation et au rayonnement de freinage par les électrons atomiques. Nous traitons dans le cas de la matérialisation les problèmes relatifs aux calculs des sections efficaces différentielles par rapport à l'angle entre les directions des 2 électrons (problèmes d'ouverture angulaire).

Nous terminons enfin en donnant les différentes formules pratiques utilisées dans l'analyse de nos données expérimentales.

§ III - Approximation de Born

Si H est l'hamiltonien d'un électron libre, H' l'hamiltonien d'interaction du négaton et du champ de rayonnement, pour un noyau considéré comme ponctuel de charge Ze , l'hamiltonien H total s'écrit :

$$H = H_0 + \frac{Ze^2}{r} + H' \quad (6)$$

L'approximation de Born consiste à prendre pour hamiltonien non perturbé H_0 et pour perturbation $\frac{Ze^2}{r} + H'$. Le calcul de $|H_{if}|$ se ramène alors à un calcul de perturbation au second ordre, avec pour condition que $\frac{Ze^2}{v}$ soit petit devant l'unité, v étant la vitesse de l'électron incident :

$$\frac{Ze^2}{v} \ll 1 \quad (7)$$

1. Sections efficaces différentielles

Les formules donnant les sections efficaces différentielles ont été obtenues par Bethe et Heitler^(5,8).

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \sigma}{dk \cdot d\theta_0 \cdot d\theta \cdot d\phi} &= \frac{Z^2}{137} \cdot \left(\frac{r_0 m_0}{2\pi} \right)^2 \frac{p \sin \theta \sin \theta_0}{k p_0 q^4} \left\{ \frac{p^2 \sin^2 \theta}{(E - p \cos \theta)^2} \cdot (4 E_0^2 - q^2) \right. \\ &+ \frac{p_0^2 \sin^2 \theta_0}{(E_0 - p_0 \cos \theta_0)^2} \cdot (4 E^2 - q^2) - \frac{2 p p_0 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi (4 E_0 \cdot E - q^2)}{(E - p \cos \theta)(E_0 - p_0 \cos \theta_0)} \\ &\left. + \frac{2 k^2 (p^2 \sin^2 \theta + p_0^2 \sin^2 \theta_0 - 2 p p_0 \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi)}{(E_0 - p_0 \cos \theta_0)(E - p \cos \theta)} \right\} \quad (8)_{RI} \end{aligned}$$

avec

$$q^2 = p^2 + k^2 + p_0^2 - 2 p_0 k \cos \theta_0 + 2 p k \cos \theta - 2 p p_0 (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi) \quad (5)_{\text{FF}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \sigma}{dE_+ d\theta_+ d\theta_- d\phi} = & - \frac{Z^2}{137} \left(\frac{r_0 m_0}{2\pi} \right)^2 \frac{p_+ p_-}{k^3 q^4} \sin \theta_+ \sin \theta_- \left\{ \frac{p_+^2 \sin^2 \theta_+ (4 E_-^2 - q^2)}{(E_+ - p_+ \cos \theta_+)^2} \right. \\ & + \frac{p_-^2 \sin^2 \theta_- (4 E_+^2 - q^2)}{(E_- - p_- \cos \theta_-)^2} + \frac{2 p_+ p_- \sin \theta_+ \sin \theta_- \cos \phi (4 E_+ E_- - q^2)}{(E_- - p_- \cos \theta_-)(E_+ - p_+ \cos \theta_+)} \\ & \left. - \frac{2 k^2 (p_+^2 \sin^2 \theta_+ + p_-^2 \sin^2 \theta_- + 2 p_+ p_- \sin \theta_+ \sin \theta_- \cos \phi)}{(E_+ - p_+ \cos \theta_+)(E_- - p_- \cos \theta_-)} \right\} \end{aligned} \quad (8)_{\text{PP}}$$

avec

$$q^2 = p_+^2 + p_-^2 + k^2 - 2 p_- k \cos \theta_- + 2 p_+ k \cos \theta_+ - 2 p_+ p_- (\cos \theta_+ \cos \theta_- + \sin \theta_+ \sin \theta_- \cos \phi) \quad (9)_{\text{PP}}$$

La formule $(8)_{\text{RF}}$ donne la probabilité pour qu'un photon d'énergie comprise entre k et $k + dk$ soit dans une direction comprise entre θ_0 et $\theta_0 + d\theta_0$ et que l'électron diffusé soit émis dans un angle solide défini par θ et $\theta + d\theta$, ϕ et $\phi + d\phi$.

De même $(8)_{\text{PP}}$ donne la probabilité pour qu'un photon produise un électron positif d'énergie comprise entre E_+ et $E_+ + dE_+$ dans une direction comprise entre θ_+ et $\theta_+ + d\theta_+$ et qu'un électron négatif soit émis dans l'angle solide défini par θ_- , $\theta_- + d\theta_-$, ϕ et $d\phi$.

Ces sections efficaces ont été obtenues en sommant sur tous les états de spin des électrons et de polarisation du photon. Nous ne pouvons donc les appliquer

qu'à des faisceaux de particules incidentes non polarisées et à des particules résultantes également non polarisées. May et Wick^(9,10,11) se sont attachés à des problèmes de polarisation, en ne sommant que sur des états de spin ou de polarisation bien déterminés.

2. Intégration sur les angles

Dans de nombreux cas le physicien ne s'intéresse qu'aux probabilités de perte d'énergie par rayonnement de freinage, le photon en tant que tel ne l'intéresse pas car il n'est pas détecté. Nous sommes donc conduits à intégrer la formule (8)_{RF} sur les angles θ_0 , θ , ϕ et nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dk} = & \left(\frac{Z^2 r_0^2}{137} \right) \cdot \frac{p}{k p_0} \left\{ \frac{4}{3} - 2 E_0 E \left(\frac{p^2 + p_0^2}{p_0^2 p^2} \right) + n_0^2 \left(\frac{\xi_0 E}{p_0^3} + \frac{\xi E_0}{p^3} - \frac{\xi \xi_0}{p_0 p} \right) \right. \\ & \left. + L \left(\frac{8 E_0 E}{3 p_0 p} + \frac{k^2 (E_0^2 E^2 + p_0^2 p^2)}{p_0^3 p^3} + \frac{n_0^2 k}{2 p_0 p} \left[\frac{(E_0 E + p_0^2) \xi_0}{p_0^3} - \frac{(E_0 E + p^2) \xi}{p^3} + \frac{2 k E_0 E}{p^2 p_0^2} \right] \right) \right\} \quad (10)_{RF} \end{aligned}$$

avec

$$L = 2 \operatorname{Log} \left(\frac{E_0 E + p_0 p - n_0^2}{k n_0} \right) \quad (11)_{RF}$$

$$\xi_0 = \operatorname{Log} \left(\frac{E_0 + p_0}{E_0 - p_0} \right)$$

$$\xi = \operatorname{Log} \left(\frac{E + p}{E - p} \right)$$

De même pour la production de paire la probabilité qu'un photon d'énergie k donne un électron positif d'énergie comprise entre E_+ et $E_+ + dE_+$ indépendamment de

l'angle d'émission est obtenue en faisant une intégration de la formule (8)_{PP} sur

θ_+ , θ_- et ϕ . Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE_+} = & \frac{Z^2 r_0^2}{137} \cdot \frac{p_+ p_-}{k^3} \left\{ -\frac{4}{3} - 2 E_+ E_- \left(\frac{p_+^2 + p_-^2}{p_+^2 p_-^2} \right) + n_0^2 \left(\frac{E_+ \xi_-}{p_-^3} + \frac{E_- \xi_+}{p_+^3} - \frac{\xi_+ \xi_-}{p_+ p_-} \right) \right. \\ & \left. + L \left(-\frac{8 E_+ E_-}{3 p_+ p_-} + \frac{k^2 (E_+^2 E_-^2 + p_+^2 p_-^2)}{p_+^3 p_-^3} - \frac{n_0^2 k}{2 p_+ p_-} \left[\frac{(E_+ E_- - p_-^2) \xi_-}{p_-^3} + \frac{(E_+ E_- - p_+^2) \xi_+}{p_+^3} + \frac{2 k E_+ E_-}{p_+^2 p_-^2} \right] \right) \right\} \end{aligned} \quad (10)_{PP}$$

avec

$$L = 2 \operatorname{Log} \left(\frac{E_+ E_- + p_+ p_- + n_0^2}{n_0 k} \right)$$

$$\xi_+ = \operatorname{Log} \left(\frac{E_+ + p_+}{E_+ - p_+} \right) \quad (11)_{PP}$$

$$\xi_- = \operatorname{Log} \left(\frac{E_- + p_-}{E_- - p_-} \right)$$

3. L'effet d'écran des électrons atomiques

Les sections efficaces précédentes sont obtenues en considérant un noyau parfaitement ponctuel de charge Ze et dépourvu de tout cortège électronique. Mais dans la pratique nous avons à faire à des atomes possédant un noyau doué d'une certaine étendue spatiale et qui est entouré d'électrons masquant plus ou moins sa charge et le faisant paraître à des grandes distances comme électriquement neutre. Le phénomène résultant est traditionnellement appelé "effet d'écran des électrons atomiques"^(8,12,13).

Le potentiel coulombien $V(r)$ peut se décomposer en deux parties :

$V_n(r)$ dû à la distribution de charge $\rho_n(r)$ dans le noyau et $V_e(r)$ dû à celle des électrons atomiques $\rho_e(r)$.

La section efficace est proportionnelle au carré de l'élément de matrice, lui-même proportionnel dans l'approximation de Born à :

$$\int e^{i(\vec{p}_0 \cdot \vec{r})} \cdot V(r) \cdot e^{-i(\vec{p} + \vec{k}) \cdot \vec{r}} d\tau = \int e^{i(\vec{q} \cdot \vec{r})} V(r) d\tau \quad (12)$$

$$|H_{if}|^2 < \frac{Z}{q^2} [F_n(q) - F_e(q)] \quad (13)$$

avec

$$F_e(q) = \frac{4\pi}{Ze} \int \rho_e(r) \frac{\sin qr}{q} \cdot r dr \quad (14)$$

$$F_n(q) = \frac{4\pi}{Ze} \int \rho_n(r) \frac{\sin qr}{q} \cdot r dr$$

$F_n(q)$ et $F_e(q)$ sont respectivement les transformées de Fourier des distributions de charge du noyau et des électrons : on les appelle "facteurs de forme".

Aux faibles transferts de quantité de mouvement $\vec{q}$ qui nous intéresse, on démontre que le facteur de forme du noyau $F_n(q)$ peut toujours être pris égal à l'unité ($\vec{q}$ petit correspond à de grand paramètre d'impact et le noyau apparaît comme ponctuel).

Les formules précédentes donnant les sections efficaces différentielles en énergie et en angle doivent alors être multipliées par le facteur $[1 - F_e(q)]^2$.

21

FIGURE 3

20

 $f_1(\gamma)$

19

 $f_2(\gamma)$

18

17

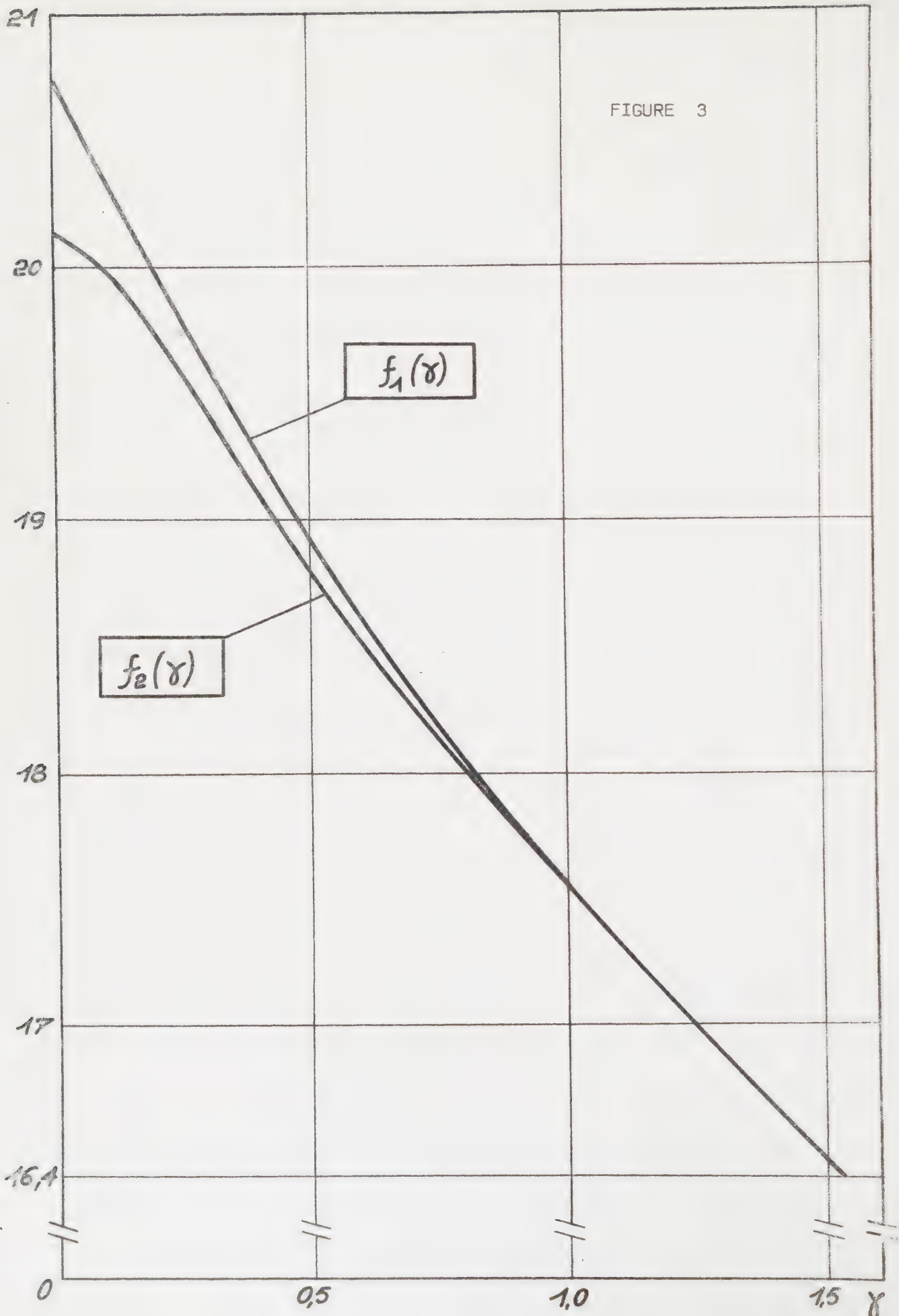
16,4

0

0,5

1,0

1,5

 γ 

Le facteur de forme électrique peut se calculer par diverses méthodes donnant toutes des résultats équivalents pour Z grand. La plus communément employée consiste à partir de la distribution de charge de Thomas-Fermi.

La définition de $F_e(q)$ montre que l'effet d'écran dépend de la charge Z_0 du noyau et de son recul q . A haute énergie ($E, k \gg n_0$) où la valeur minimum de q devient égale à :

$$q_{\min} = \frac{k n_0^2}{2 E_0 E} \quad (15)_{\text{RF}}$$

et

$$q_{\min} = \frac{k n_0^2}{2 E_+ E_-} \quad (15)_{\text{PF}}$$

l'effet d'écran peut s'exprimer en fonction de la quantité χ définie par :

$$\chi = 200 q_{\min} / Z^{-1/3} = \frac{100 k n_0^2}{E E_0 Z^{-1/3}} \quad (16)_{\text{RF}}$$

et

$$\chi = 200 q_{\min} / Z^{-1/3} = \frac{100 k n_0^2}{E_+ E_- Z^{-1/3}} \quad (16)_{\text{PF}}$$

Les résultats de la méthode de Thomas-Fermi étant purement numériques, l'intégration des sections efficaces différentielles ne peut plus se faire de manière analytique.

Elle nécessite l'introduction de trois fonctions $f_1(\chi)$, $f_2(\chi)$ et $c(\chi)$ calculées par Bethe^(5,8) et valables seulement aux hautes énergies ($E, k \gg n_0$).

Rayonnement de freinage

a) Pour $\chi < 2$

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{4 Z^2 r_0^2}{137} \cdot \frac{1}{k} \left\{ 1 + \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \left[\frac{f_1(\chi)}{4} - \frac{1}{3} \text{Log}(Z) \right] - \frac{2}{3} \frac{E}{E_0} \left[\frac{f_2(\chi)}{4} - \frac{1}{3} \text{Log}(Z) \right] \right\} \quad (17)_{\text{RF}}$$

T A B L E A U I

γ	2	2,5	3	4	5	6	7	8	9	10	15
$C(\gamma)$	0,21	0,17	0,125	0,09	0,07	0,05	0,045	0,030	0,025	0,025	0,008

Tableau I - Ce tableau donne la fonction $C(\gamma)$ introduite lorsque l'on considère l'effet d'écran des électrons atomiques - Formules $(17)_{RF}$ et $(17)_{FP}$

b) Pour $2 \leq \gamma \leq 15$

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{4 Z^2 r_0^2}{137} \cdot \frac{1}{k} \left\{ 1 + \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E}{E_0} \right\} \left\{ \text{Log} \left(\frac{2E_0 E}{k m_0} \right) - \frac{1}{2} - c(\gamma) \right\} \quad (17)_{\text{FF}}$$

c) Pour $\gamma \sim 0$

$$\frac{d\sigma}{dk} = \frac{4 Z^2 r_0^2}{137} \cdot \frac{1}{k} \left\{ \left[1 + \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{E}{E_0} \right] \left[\text{Log} (183 Z^{-1/3}) \right] + \frac{1}{9} \frac{E}{E_0} \right\} \quad (17)_{\text{FF}}$$

Production de paires

a) Pour $\gamma < 2$

$$\frac{d\sigma}{dE_+} = \frac{4 Z^2 r_0^2}{137} \cdot \frac{1}{k^3} \left\{ [E_+^2 + E_-^2] \left[\frac{f_1(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \text{Log}(Z) \right] + \frac{2}{3} E_+ E_- \left[\frac{f_2(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \text{Log} Z \right] \right\} \quad (17)_{\text{PP}}$$

b) Pour $2 \leq \gamma \leq 15$

$$\frac{d\sigma}{dE_+} = \frac{4 Z^2 r_0^2}{137} \cdot \frac{1}{k^3} \left\{ E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3} E_+ E_- \right\} \left\{ \text{Log} \left(\frac{2 E_+ E_-}{k m_0} \right) - \frac{1}{2} - c(\gamma) \right\} \quad (17)_{\text{PP}}$$

c) Pour $\gamma \sim 0$

$$\frac{d\sigma}{dE_+} = \frac{4 Z^2 r_0^2}{137} \cdot \frac{1}{k^3} \left\{ [E_+^2 + E_-^2 + \frac{2}{3} E_+ E_-] \text{Log}(183 Z^{-1/3}) - \frac{1}{9} E_+ E_- \right\} \quad (17)_{\text{PP}}$$

Les fonctions $f_1(\gamma)$, $f_2(\gamma)$ et $c(\gamma)$ sont données sur la Figure 3 et le Tableau I.

4. Contributions apportées par les électrons atomiques

Les électrons atomiques, en plus de leur effet d'écran sur le champ du noyau, jouent un rôle non négligeable dans les deux phénomènes qui nous intéressent. En effet, le rayonnement de freinage et la matérialisation peuvent se produire dans

le champ électrique des électrons. La matérialisation porte, dans ce cas, le nom de "production de triplet". En effet, lorsque le phénomène est visualisé, il apparaît sous l'aspect de trois trajectoires d'électrons issus d'un même point (paire e^+ , e^- + l'électron atomique de recul). Le terme correctif rendant compte de ce phénomène est un terme additif qui augmente les sections efficaces. Perrin⁽¹⁴⁾ dès 1933 a signalé la possibilité de tels événements et donné l'énergie de seuil du phénomène triplet ($E = 4 m_0$). Les calculs théoriques ont été faits par de nombreux auteurs : Borsellino⁽¹⁵⁾, Votruba⁽¹⁸⁾, Wheeler et Lamb⁽¹⁶⁾, Suh et Bethe⁽¹⁷⁾ ... Lorsque les énergies mises en jeu sont importantes ($E, k \gg m_0$) les équations données plus haut, où l'effet d'écran n'est pas pris en considération, sont applicables au cas d'un électron, en remplaçant la charge Ze du noyau par la charge e de l'électron. Les sections efficaces intégrées sur les angles et rendant compte du phénomène total sur l'atome ne sont autres que celles dues au noyau + Z fois celles dues à un électron. Il nous faut donc remplacer Z^2 par $Z(Z + 1)$ dans les formules relatives au noyau seul.

Ceci est exact en première approximation, mais dans un calcul rigoureux il faut remplacer le potentiel coulombien en $\frac{1}{r}$ utilisé par Bethe par le potentiel de Möller⁽¹⁹⁾ qui tient compte de l'effet de retard (potentiel retardé) : l'électron cible peut acquérir une vitesse suffisante pour que cet effet ne soit pas négligeable. Les calculs ont été effectués avec un tel potentiel, par Borsellino⁽¹⁵⁾

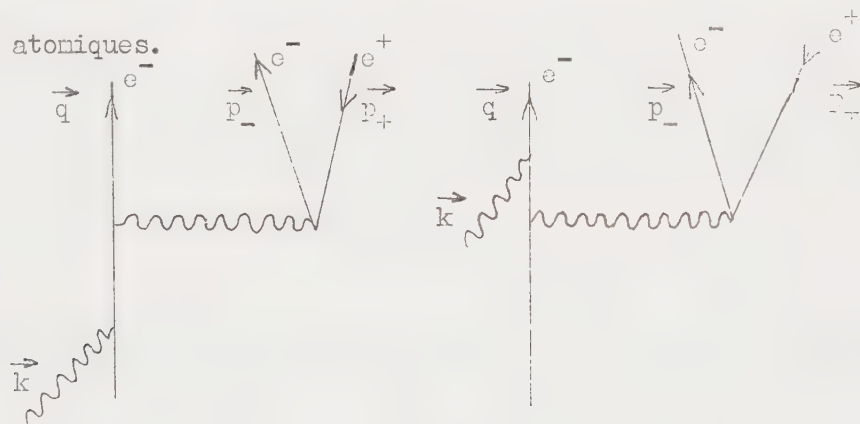
Les effets du rayonnement de freinage et de matérialisation dans le champ des électrons atomiques, d'après Wheeler et Lamb⁽¹⁶⁾ s'intègrent, en

définitive, dans le calcul général, en prenant au lieu de $Z(Z+1)$, $Z(Z+\gamma)$

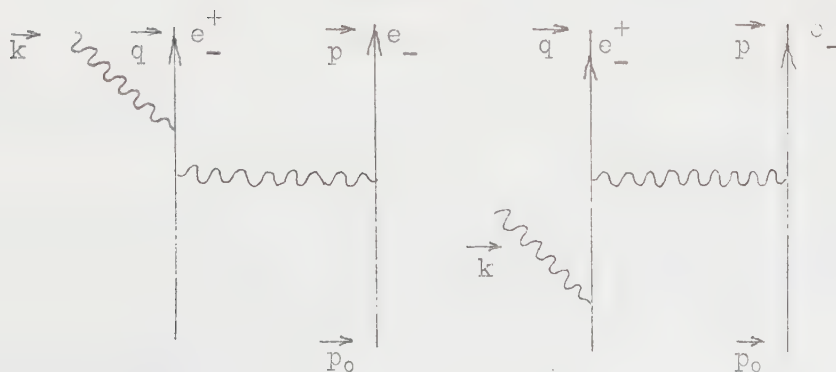
où γ est donné par :

$$\gamma = \text{Log} (1440 Z^{-2/3} / \text{Log} (183 Z^{-1/3})) \quad (18)$$

On peut se demander si lors de tels phénomènes dans le champ d'un électron le fait que nous ayons deux électrons indiscernables en présence l'un de l'autre introduit une correction dite "effet d'échange". Watson⁽²⁰⁾ a montré que même à des transferts de quantité de mouvement importants il n'en était rien. Il en est de même des contributions apportées par les diagrammes de Feynmann correspondant aux interactions γ -e apparaissant dans les phénomènes qui prennent naissance sur les électrons atomiques.



Interaction γ - e (PP)



Interaction γ - e (RF)

Mork (21) a montré récemment par intégration numérique des sections efficaces différentielles obtenues par Borsellino⁽¹⁵⁾, que ces deux effets (γ -e et échange) n'induisent des corrections qu'à des énergies très faibles (inférieures à 10 MeV).

§ IV - Correction de Coulomb

Nous avons vu que l'approximation de Born revient à prendre pour hamiltonien d'interaction :

$$H_{\text{int}} = H' + \frac{Ze^2}{r} \quad (19)$$

$\frac{Ze^2}{r}$ étant le potentiel de Coulomb et H' étant le terme de couplage de l'électron et du champ de rayonnement. Rappelons que le calcul était valable sous la condition :

$$\frac{Ze^2}{v} \ll 1$$

soit pour des éléments légers ou des vitesses v voisines de celles de la lumière. Mais lorsque Z devient assez fort (~ 40) les divergences expérimentales deviennent importante (jusqu'à 10 % pour le plomb). Pour améliorer cette solution Bess⁽⁶⁾ prend pour hamiltonien non perturbé, non plus H_0 , mais $H_0 + Ze^2/r$, et H' seulement pour hamiltonien d'interaction.

Pour avoir les fonctions d'onde non perturbées nécessaires à la suite des calculs il faut maintenant résoudre l'équation de Dirac appliquée au cas d'un électron dans un champ coulombien.

Dans le cas non relativiste (équation de Schrödinger) nous savons résoudre un tel problème de diffusion coulombienne d'électrons⁽²²⁾ en travaillant en coordonnées paraboliques. Mais la présence des termes de spin dans l'équation de Dirac ne permet pas d'obtenir une solution séparable en de telles coordonnées.

Ainsi que le remarquent Bethe et Maximon⁽⁷⁾ une solution séduisante serait d'utiliser la méthode des déphasages en séparant les fonctions d'onde en coordonnées polaires, ceci ayant été fait par Darwin⁽²³⁾ ; mais comme les moments angulaires des électrons dans les états initial et final sont en nombre considérable, nous sommes conduits à calculer un nombre très élevé d'éléments de matrice de transition (10^9 pour une énergie $k = 100$ MeV). Ces diverses raisons font que le problème ne sera pas résolu de manière analytique : les fonctions d'onde sont calculées par un processus itératif selon une méthode proposée par Sommerfeld et Maue⁽²⁴⁾. Nous pouvons comme Bethe et Maximon comparer les fonctions d'onde avec celles obtenues par la méthode de déphasage de Darwin. L'accord est vérifié si la condition $a_0^2/l^2 \ll 1$ est satisfaite. a_0 étant égal à Z fois la constante de couplage et l étant le moment angulaire de l'électron considéré.

Remarquons que loin du noyau les fonctions d'onde doivent être asymptotiques à une onde plane.

Bethe et Maximon ont repris le calcul de Bess avec une plus grande rigueur.

L'équation de Dirac

$$(H_0 + \frac{Ze^2}{r}) \psi = E \psi \quad (20)$$

est résolue de manière approchée avec :

$$\psi = \psi_a + \psi_b + \psi_c \quad (21)$$

où ψ_c est un terme indéterminé mais telle que sa contribution aux éléments de matrice soit négligeable devant celles dues aux deux premiers termes. Cette contribution liée à la condition $a_0^2/l^2 \ll 1$ donne en fait la limitation de la méthode valable si $E, k \ll m_0$; elle conduit à une erreur estimée à :

$$(Z/137)^2 \cdot \frac{\text{Log}(E_0)}{E_0} \quad (22)_{\text{RF}}$$

et

$$(Z/137)^2 \cdot \frac{\text{Log}(k)}{k} \quad (22)_{\text{PP}}$$

La fonction utilisée est alors :

$$\psi \simeq \psi_a + \psi_b = e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r})} \cdot \left\{ 1 - \frac{im_0(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla})}{2 E_0} \right\} u_F(r) \quad (23)$$

où u est le spineur de l'électron libre et $F(r)$ la fonction de Furry⁽²⁵⁾

solution de l'équation :

$$(\nabla^2 + \frac{2i}{m_0} \cdot (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) - \frac{2EV}{m_0}) F(r) = 0 \quad (24)$$

$F(r)$ est normalisée à l'unité par la condition

$$F(r) \longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad r \longrightarrow \infty \quad (25)$$

Dans ces expressions $V(r)$ est le potentiel coulombien. Les solutions $F(r)$ sont données par Sommerfeld et Maue dans le cas de champ purement coulombien et par Olsen, Maximon et Wergeland⁽²⁶⁾ dans le cas où l'on tient compte de l'effet d'écran.

1. Effet d'écran

Le calcul avec effet d'écran, conduit à des formules aux formes relativement compliquées. Olsen, Maximon et Wergeland⁽²⁶⁾ ont montré cependant qu'après intégration sur les angles les formules (17) restent valables à un terme correctif près. En effet, il est possible de montrer que l'on a :

$$\int \frac{d}{d\Omega} \sigma_{\text{effet d'écran}}^{\text{exact}} d\Omega = \int \frac{d}{d\Omega} \sigma_{\text{effet d'écran}}^{\text{Born}} d\Omega + \int \frac{d}{d\Omega} \left\{ \sigma_{\text{pas d'effet d'écran}}^{\text{exact}} - \sigma_{\text{pas d'effet d'écran}}^{\text{Born}} \right\} d\Omega \quad (26)$$

L'intégration des sections efficaces différentielles est faite sur les angles.

La formule (26) peut se mettre sous la forme :

$$\int \frac{d}{d\Omega} \sigma_{\text{effet d'écran}}^{\text{exact}} d\Omega = [1 - f(Z)] \int \frac{d}{d\Omega} \sigma_{\text{effet d'écran}}^{\text{Born}} d\Omega \quad (27)$$

$f(Z)$ étant la fonction donnée par Davies, Bethe et Maximon⁽²⁷⁾ :

$$f(Z) = \left(\frac{Z}{137}\right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \left\{ i^2 + \left(\frac{Z}{137}\right)^2 \right\}} \quad (28)$$

2. Le rayonnement de freinage et la matérialisation dans le champ des électrons atomiques

Le rayonnement de freinage et la matérialisation dans le champ des électrons atomiques qui apparaissent en fait comme des termes correctifs à ajouter au phénomène dans le champ des noyaux, peuvent être traités avec moins de rigueur que ces derniers ; il nous suffit de calculer les termes correctifs dans l'approximation de Born. Nous serons donc conduits dans les nouvelles formules à remplacer comme précédemment Z^2 par $Z(Z + \frac{1}{2})$.

§ V - Ouverture angulaire d'une paire de matérialisation

Nous appelons ouverture angulaire d'une paire de matérialisation l'angle $\hat{u}$ entre les directions d'émission des deux électrons. Nous verrons plus loin que cette quantité est intimement liée à la quantité de mouvement de recul du noyau $\vec{q}$.

Borsellino⁽²⁸⁾ donne une expression de la section efficace différentielle par rapport à la quantité de mouvement transférée à la paire : $P = \left| \vec{p}_+ + \vec{p}_- \right|$. Après une intégration sur les angles de la formule (8)_{PP} de Bethe il obtient en se limitant en haute énergie ($E_+, E_- \gg m_0$).

$$\frac{d\sigma'}{dP} = \frac{16 \cdot Z^2 r_0^2 m_0^2}{137} \cdot \frac{F \cdot P}{(k^2 - P^2)^2} \quad (29)$$

où

$$F = \text{Log}(k/Q) \cdot \left\{ L \cdot (2 + 8 m_0^2/Q^2 - 16 m_0^4/Q^4) - \Delta (1 + 4 m_0^2/Q^2) \right\} - \\ - (L/6) \cdot 16 + 84 m_0^2/Q^2 - 136 m_0^4/Q^4 + (\Delta/12) \cdot (28 + 68 m_0^2/Q^2) \quad (30)$$

avec

$$\Delta = (1 - 4 m_0^2/Q^2)^{1/2} \quad (31)$$

et

$$L = \cosh^{-1} (Q/2 m_0) \quad (32)$$

dans ces formules Q est l'énergie de la paire dans le système du centre de masse des deux électrons.

$$Q = \sqrt{k^2 - P^2} \quad (33)$$

Au moyen du changement de variable exprimé par la formule (33) on obtient la section efficace différentielle en Q

$$\frac{d\sigma}{dQ} = \frac{16 Z^2 r_o^2 m_o^2}{137} \cdot \frac{F}{Q^3} \quad (34)$$

Si nous posons :

$$a = \frac{E_+}{k} \quad (35)$$

$$\hat{\omega}_o = \frac{km_o}{E_+ \cdot E_-} = \frac{m_o}{ka (1 - a)} \quad (36)$$

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{u}}{\hat{\omega}_o} \quad (37)$$

un calcul simple nous donne :

$$Q^2 = E_+ E_- (\hat{\omega}_o^2 + \hat{u}^2) = \frac{m_o^2}{a(1-a)} \cdot (1 + \frac{\hat{u}^2}{\hat{\omega}_o^2}) = \frac{1 + \mathcal{H}^2}{a(1-a)} \cdot m_o^2 \quad (38)$$

A ce stade du calcul, Borsellino avait pensé qu'il suffisait dans l'équation (34) de remplacer Q par sa valeur en fonction de la quantité $\mathcal{H}$, pour obtenir la section efficace différentielle par rapport à l'ouverture angulaire $\hat{u}$ liée directement à $\mathcal{H}$ par la relation (37). Mais, ainsi que l'a remarqué Olsen⁽²⁹⁾ la formule (34) donne une section efficace dérivée une fois, alors que (38) est fonction simultanée de deux variables $\hat{u}$ et a . Le résultat obtenu par Borsellino est une section efficace différentielle d'une certaine quantité, combinaison de $\hat{u}$ et de a mais non point une section efficace différentielle de l'ouverture angulaire.

Olsen⁽²⁹⁾ part de la section efficace différentielle donnée par Olsen et Maximon⁽³⁰⁾ valable aux hautes énergies, et introduit avant d'effectuer les intégrations sur Θ_+ et φ l'angle $\hat{u}$ à l'aide des quantités $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q}$ respectivement définies par (36) et (37) d'une part, et d'autre part par l'équation :

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{1 + \mathcal{R}^2} \quad (40)$$

Les intégrations conduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\mathcal{R}, \mathcal{Q})}{d\mathcal{R} d\mathcal{Q}} &= \frac{Z^2 r_0^2}{137} \mathcal{R} \mathcal{Q}^2 \cdot \\ &\left\{ 2 \left(1 - \frac{E_+}{k} \operatorname{Log} \left(\frac{E_+}{k} \right) - \frac{E_-}{k} \operatorname{Log} \left(\frac{E_-}{k} \right) - \frac{E_+^2 + E_-^2}{2 k^2} \right) \left[E_+^2 + E_-^2 + 4 E_+ E_- \mathcal{Q} (1 - \mathcal{Q}) \right] \right. \\ &+ 8 E_+ E_- \mathcal{Q} (1 - \mathcal{Q}) \left[\frac{E_+ E_- (E_+ - E_-)}{k^3} \operatorname{Log} \frac{E_-}{E_+} - \frac{E_+^2 + E_-^2}{2 k^2} - 1 \right] \\ &\left. - \frac{\gamma}{\sinh \gamma} \cdot \left[(E_+^2 + E_-^2) \mathcal{Q}^{-1} + 4 \left(\frac{E_+ E_-}{k} \right)^2 \right] \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

où γ et $\mathcal{Q}$ sont liés par la relation :

$$\cosh (\gamma / 2) = \mathcal{Q}^{-\frac{1}{2}} \quad (42)$$

μ est un facteur tenant compte de l'effet d'écran et tel que :

$$\mu = \operatorname{Log} \left(\frac{k}{2 m_0} \right) + \mathcal{F} (2 m_0 / k \mathcal{Q}) \quad (43)$$

La fonction $\mathcal{F} (2 m_0 / k \mathcal{Q})$ est celle donnée par Olsen et Maximon.



FIGURE 4 $-\mathcal{H}_p(a)$ en fonction de a pour $k = 100 \text{ MeV}$ calculé dans l'émulsion nucléaire

Discussion de la formule d'Olsen

Il nous faut ici discuter de la formule (41) utilisée dans la suite de l'analyse de nos résultats expérimentaux.

Tout d'abord la formule (41) n'est valable que pour des énergies élevées ($E_+, E_- \gg m_0$).

D'autre part, l'intégration de (41) sur E_+ et l'introduction de la quantité Q définie par (36) conduit à la formule de Borsellino déjà citée (29) et (30). Ceci est une vérification des sections efficaces différentielles de départ⁽²⁹⁾. De plus, la forme de la section efficace varie lentement avec l'énergie du photon k , ainsi qu'avec le rapport $a = E_+/k$. Cette propriété sera exploitée lors d'intégration de grandeurs liées avec la forme de cette section efficace. En effet, il sera possible d'éviter les intégrations en appliquant le théorème de la moyenne donc en choisissant la fonction pour une valeur moyenne de la variable. Cette simplification est rendue possible par le caractère monotone des fonctions lentement variables de k ou de a . L'intégration sur k de quantités telles que $\mathcal{H}_p(a)$, valeur la plus probable de $\mathcal{H}(a)$ sera donc évitée en prenant la valeur de $\mathcal{H}_p(a)$ correspondant à une énergie moyenne. Par contre, pour l'intégration sur a , prendre une valeur moyenne de a égale à 0,5 conduit à une mauvaise approximation ; en effet, la formule (41) est symétrique par rapport à cette valeur de a correspondant à l'équipartition et ainsi que nous le voyons par exemple à la Figure 4. Les quantités déduites de cette section efficace présentent un extremum pour cette valeur ; cet extremum est éloigné de la valeur moyenne. Il sera donc préférable pour se rapprocher de la valeur moyenne correcte d'appliquer le théorème de la moyenne à $a = 1/4$ ou $a = 3/4$.

Il était important de préciser ce dernier point : car de nombreux auteurs, Olsen en particulier, se placent fréquemment dans le cas de l'équipartition.

§ IV - Formule utilisée dans l'analyse expérimentale des résultats

Dans l'analyse de nos résultats nous utiliserons des formules tenant compte des différentes corrections étudiées ci-dessus.

Dans le cas de la matérialisation de photons d'énergie supérieur à 10 MeV et dans le cas du rayonnement de freinage à toutes énergies les formules suivantes correspondent aux notations utilisées par Messel⁽³¹⁾.

$$\begin{aligned} \frac{dC(a)}{da} = \frac{4 Z (Z+1)}{137} \cdot r_0^2 \left(\text{Log } 183 Z^{-\frac{1}{3}} - f(Z) \right) \cdot \left\{ aB(\delta) + \right. \\ \left. + \frac{1-a}{a} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{9 [\text{Log}(183 Z^{-1/3}) - f(Z)]} \right) A(\delta) \right\} \end{aligned}$$

(44)_{RF}

et

$$\begin{aligned} \frac{dC(a)}{da} = \frac{4 Z (Z+1)}{137} r_0^2 \left(\text{Log}(183 Z^{-\frac{1}{3}}) - f(Z) \right) \cdot \left\{ \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{36 [\text{Log}(183 Z^{-1/3}) - f(Z)]} \right) \cdot C(\delta) + \right. \\ \left. + \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{9 [\text{Log}(183 Z^{-1/3}) - f(Z)]} \right) A(\delta) \right\} \end{aligned}$$

(44)_{PF}

où a est donné pour chaque cas par :

$$a = \frac{k}{E_0} \tag{45}_{RF}$$

et

$$a = \frac{E_+}{k} \tag{45}_{PF}$$

δ tient compte de l'effet d'écran et est lié à χ défini précédemment par la relation :

$$\delta = 1,36 \chi \quad (46)$$

δ aura alors pour expression

$$\delta = 136 Z^{-1/3} \cdot \frac{E_0}{E_0} \cdot \frac{a}{1-a} \quad (47)_{RE}$$

et

$$\delta = 136 Z^{-1/3} \cdot \frac{E_0}{k} \cdot \frac{1}{a(1-a)} \quad (47)_{PP}$$

Le terme $f(Z)$ est celui de correction de Coulomb donné par (27) ; les quantités $A(\delta)$, $B(\delta)$, $C(\delta)$ sont données par :

$$\begin{aligned} A(\delta) &= \frac{3 f_1(\delta) - f_2(\delta) + 8 [\text{Log}(Z^{-1/3}) - f(Z)]}{3 f_1(0) - f_2(0) + 8 [\text{Log}(Z^{-1/3}) - f(Z)]} \\ B(\delta) &= \frac{f_1(\delta) + 4 [\text{Log}(Z^{-1/3}) - f(Z)]}{f_1(0) + 4 [\text{Log}(Z^{-1/3}) - f(Z)]} \\ C(\delta) &= \frac{3 f_1(\delta) + f_2(\delta) + 16 [\text{Log}(Z^{-1/3}) - f(Z)]}{3 f_1(0) + f_2(0) + 16 [\text{Log}(Z^{-1/3}) - f(Z)]} \end{aligned} \quad (48)$$

$f_1(\delta)$ et $f_2(\delta)$ sont les fonctions utilisées dans les formules (17) .

Messel utilise les formules suivantes qui les approximent de manière satisfaisante :

$$\begin{aligned} f_1(\delta) &= 20,867 - 3,242 \cdot \delta + 0,625 \cdot \delta^2 \\ f_2(\delta) &= 20,209 - 1,930 \cdot \delta - 0,086 \cdot \delta^2 \end{aligned} \quad \text{si } \delta \leq 1 \quad (49)$$

$$\text{et} \quad f_1(\delta) = f_2(\delta) = 21,12 - 4,184 \text{Log}(\delta + 0,952) \quad \text{si } \delta \geq 1 \quad (50)$$

et enfin γ rend compte de l'effet des électrons atomiques (Formule 18).

Lorsque les énergies sont inférieures à 10 MeV nous utilisons une formule approximative pour la production de paire ; elle est valable avec une bonne précision (5 %). Cette formule donnée par Bethe et Ashkin⁽³²⁾ est due en partie à Hough.

$$\frac{d\sigma(a)}{da} \propto \sqrt{a(1-a)} \quad (51)_{PP}$$

avec :

$$a = \frac{E_+ - n_0}{k - 2 n_0} \quad (52)$$

Dans les problèmes d'ouverture angulaire nous utilisons la formule (41) donnée par Olsen. Nous remplaçons la fonction $\mathcal{F}(x)$ donnant l'effet d'écran par une expression numérique.

$$\mathcal{F}(x) = 0,001 \cdot x^2 + 0,006 x + 0,039 \quad \text{si } x < 40 \quad (53)$$

et :

$$\mathcal{F}(x) = 0,0806 x - 1,303 \quad \text{si } x > 40 \quad (54)$$

De même nous avons déterminé la formule numérique

$$\mathcal{H}_p(a, 100) = 0,689 - 0,242 \sqrt{a^2 - a + 0,625} \quad (55)$$

donnant la variation de $\mathcal{H}_p(a)$ en fonction de a pour une énergie de photon égale à 100 MeV.

Ces expressions numériques donnant $\mathcal{H}_p(a)$ et $\mathcal{F}(x)$ ont été établies pour l'émulsion nucléaire Ilford G 5.

- 1 G. W. HEITLER : The Quantum Theory of Radiation, Oxford Press .
(third edition), 1954
- 2 G. J.M. JAUCH et F. ROHRlich : Theory of Photons and Electrons,
Addison-Wesley, (second edition), 1959
- 3 G. H.W. KOCH and J.W. MOTZ : Rev. Mod. Phys. 31, 920 (1959)
- 4 G. H.A. BETHE and J. ASHKIN : in Vol. 1 of Segré's Experimental Nuclear
Physics, p. 279, John Wiley and Sons, Inc., New-York,
1953

Références

1. R.P. ~~FEYNMAN~~ : Phys. Rev. 76, 769 (1949)
2. R.P. FEYNMAN : Phys. Rev. 80, 440 (1950)
3. F.J. DYSON : Phys. Rev. 75, 486 (1949)
4. Réf. 1 G. (p. 143)
5. H.A. BETHE and W. HEITLER : Proc. Roy. Soc. A 146, 83 (1934)
6. L. BESS : Phys. Rev. 77, 550 (1950)
7. H.A. BETHE and L.C. MAXIMON : Phys. Rev. 93, 768 (1954)
8. H.A. BETHE : Proc. Camb. Phil. Soc. 30, 524 (1934)
9. G.C. WICK : Phys. Rev. 81, 467 (1951)
10. M.M. MAY and G.C. WICK : Phys. Rev. 81, 628 (1951)
11. M.M. MAY : Phys. Rev. 84, 265 (1951)
12. Référence 4 G.
13. Référence 3 G (p. 934 et suivantes)
14. F. PERRIN : C.R. Acad. Scs 197, 1100 (1933)
15. A. BORSELLINO : Nuovo Cimento 4, 112 (1947)
16. J.A. WHEELER and W.E. LAMB : Phys. Rev. 55, 858 (1939)
17. K.S. SUH and H.A. BETHE : Phys. Rev. 115, 672 (1959)
18. V. VOTRUBA : Bull. Intern. Acad. Tchèque Sci. 49, 19 (1948)
19. C. MOLLER : Zeits J. Phys., 70, 768 (1931)
20. K.M. WATSON : Phys. Rev. 72, 1060 (1947)

21. K.J. MORK: (en cours de publication)
22. L.I. SCHIFF : Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill Book Company, Inc.,
p. 87 (second edition), 1955
23. C.G. DARWIN : Proc. Roy. Soc. (London) A 118, 654 (1928)
24. Von A. SOMMERFELD, A.W. MAUE : Ann der Physik, 22, 629 (1935)
25. W.H. FURRY : Phys. Rev. 46, 391 (1934)
26. H. OLSEN, L.C. MAXIMON and WERGELAND : Phys. Rev. 106, 27 (1957)
27. H. DAVIES, H. A. BETHE and L.C. MAXIMON : Phys. Rev. 93, 788 (1953)
28. A. BORSELLINO : Phys. Rev. 89, 1023 (1953)
29. H. OLSEN : Phys. Rev. 131, 406 (1963)
30. H. OLSEN and L.C. MAXIMON : Phys. Rev. 114, 887 (1959)
31. H. MESSEL, A.D. SMIRNOV, A.A. VARFOLOMEEV, D.F. CRAWFORD and J.C. BUTCHER,
Nuclear Physics, 39, 1 (1962)
32. Réf. 4 G (p. 330)

CHAPITRE II

DIFFUSION COULOMBIENNE MULTIPLE

L'analyse expérimentale d'une partie de notre travail consiste en des corrections dues aux diffusions multiples. Nous allons dans ce Chapitre définir différentes quantités liées aux diffusions coulombiennes et rappeler les différentes théories de ce phénomène.

§ I - Généralités

On donne le nom de diffusion d'une particule à toute interaction de cette particule avec un champ de force, à la condition que la nature de la particule soit conservée dans l'interaction. On définit l'angle de diffusion θ de la particule comme étant celui de la ligne de vol de la particule avant l'interaction avec sa ligne de vol après l'interaction.

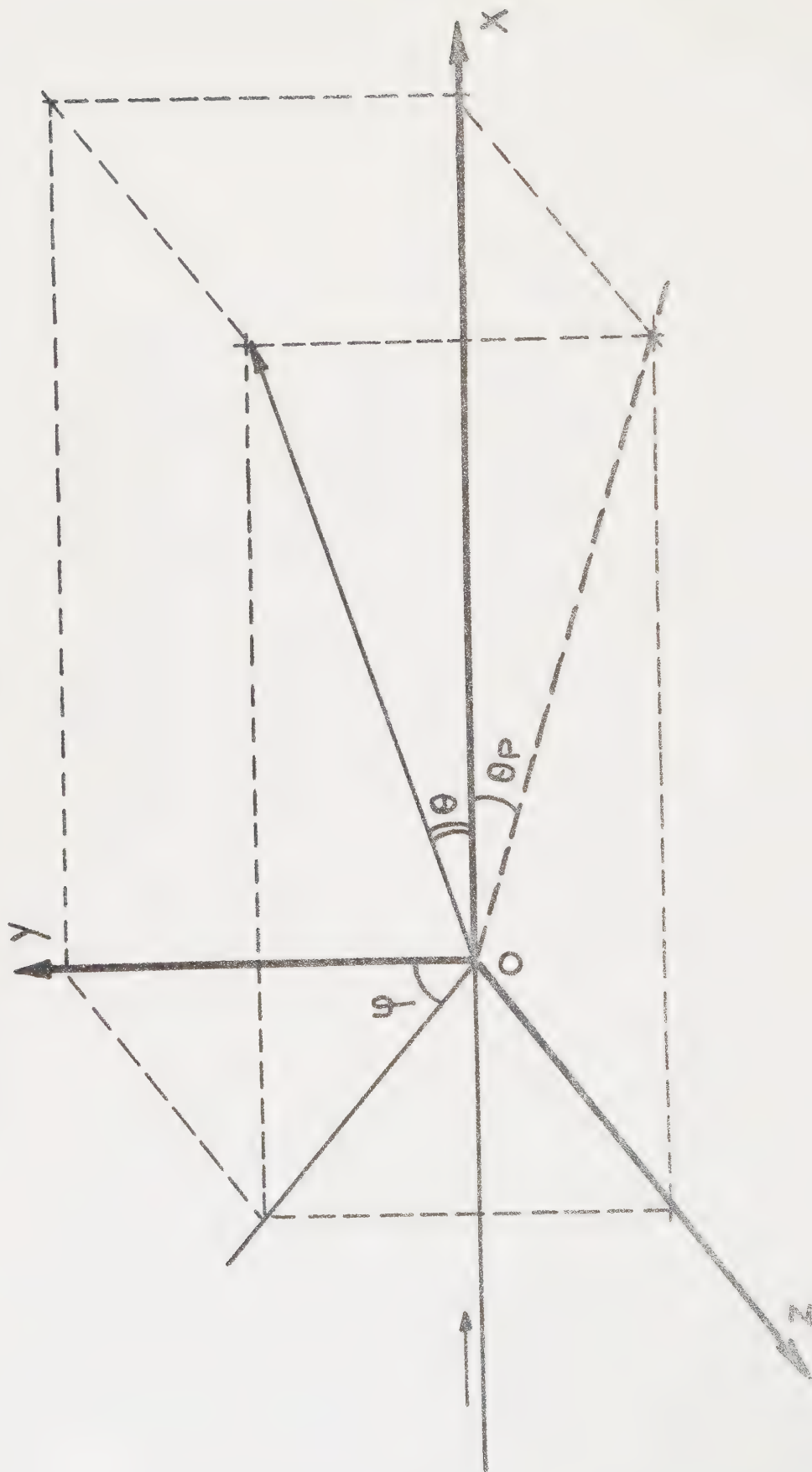
La diffusion est dite simple si l'interaction est unique ; elle est dite multiple si la diffusion observée est le résultat de nombreuses interactions simples. On lui associe alors la longueur de matière traversée.

La diffusion simple est dite élastique si la particule diffusée et le centre diffuseur sont dans le même état quantique avant et après l'interaction et si de plus aucune autre particule n'est produite. Dans le cas contraire la diffusion est dite inélastique.

Une diffusion est dite coulombienne si elle est due à la seule interaction des charges électriques mises en jeu. Nous appellerons diffusion coulombienne multiple le résultat d'une succession de diffusions coulombiennes simples élastiques.

Après avoir précisé nos notations nous allons étudier les diffusions coulombiennes simples, donner une vue du problème expérimental de la diffusion coulombienne multiple, et considérer les différentes manières d'aborder et de

FIGURE 1 - Diffusion élastique simple



résoudre ce problème ; nous donnerons enfin une description détaillée des travaux de Lohrman⁽¹⁾ sur le problème de la diffusion coulombienne multiple appliquée à une matérialisation (e^- , e^+) dans les émulsions photographiques. Ces travaux sont, en effet, le point de départ de notre analyse expérimentale.

§ II - Notations (Figure 1)

Système de référence	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Oxyz : trièdre trirectangle direct} \\ \text{Origine : } O \text{ situé dans le plan de la surface d'entrée de la cible} \\ \text{Axe Ox : direction de la particule incidente} \\ \text{Axes Oy et Oz : dans le plan de la surface d'entrée de la cible} \end{array} \right.$
Particule diffusée	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Charge : } ze \\ \text{Quantité de mouvement : } \vec{p} \\ \text{Vitesse : } \vec{v} \\ \text{Masse : } m_0 \\ \text{Energie : } E(x) \text{ (fonction de l'épaisseur traversée)} \\ \text{Angle de diffusion : } \theta \\ \text{Angle de diffusion projeté sur le Oxy : } \theta_y \\ \text{Diffusion coulombienne multiple associée à } \Delta x \left\{ \begin{array}{l} \text{angle : } \theta_{\Delta x} \\ \text{angle moyen : } \langle \theta \rangle_{\Delta x} \\ \text{angle carré moyen : } \langle \theta^2 \rangle_{\Delta x} \end{array} \right. \\ \text{Deuxième angle polaire de diffusion : } \varphi \end{array} \right.$
Cible	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Charge du noyau : } Ze \\ \text{Masse : } M_0 \text{ infiniment lourde devant celle de la particule diffusée} \end{array} \right.$

§ III - Diffusion coulombienne simple

La diffusion d'une particule de charge ze par un noyau Ze est déterminée par une forme modifiée de la loi de Rutherford. Rappelons que si b est le paramètre d'impact - distance de la ligne de vol de la particule avant la collision au noyau diffuseur supposé ponctuel et infiniment lourd par rapport à la particule incidente - pour une particule de vitesse v , de masse m_0 nous avons entre l'angle de diffusion et b le paramètre d'impact :

$$b = \frac{z Z e^2 \cos(\theta/2)}{m_0 v^2 \sin(\theta/2)} \quad (1)$$

La section efficace différentielle par centre diffuseur est alors liée à la surface de la couronne circulaire comprise entre b et $b + db$

$$d\sigma = 2\pi b db \quad (2)$$

On en déduit la section efficace différentielle par centre diffuseur dans l'angle solide $d\Omega$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left\{ \frac{z Z e^2}{2 m_0 v^2} \right\}^2 \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} \quad (3)$$

Cette formule est le résultat des calculs effectués exclusivement dans un cadre classique et avec un noyau nu, c'est-à-dire, dépourvu de tout cortège électro-nique. Nous devons maintenant apporter des corrections à ce résultat :

1°- La première modification consiste à effectuer le calcul dans un cas relativiste. Pour des particules relativistes sans spin Williams ^(2,3) donne pour section efficace différentielle dans l'approximation de Born :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left\{ \frac{z Z e^2}{2 p v} \right\}^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (4)$$

où p est la quantité de mouvement de la particule.

2°- Mott⁽⁴⁾ s'est intéressé au cas des particules de spin $\frac{1}{2}$ (cas de l'électron par exemple). Il obtient pour formule :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left\{ \frac{z Z e^2}{2 p v} \right\}^2 \cdot \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (5)$$

Remarquons que si pour des grands angles la correction due au spin est importante, pour des valeurs de θ petites nous pouvons utiliser dans tous les cas la formule :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left\{ \frac{z Z e^2}{2 p v} \right\}^2 \cdot \frac{1}{(\theta/2)^4} \quad (6)$$

3°- La validité de ces équations pour des atomes neutres s'arrête là où commence l'effet de la dimension finie du noyau et l'effet des électrons atomiques.

Williams^(2,3) a montré que si l'on considère un noyau sphérique de diamètre d_0 lié au rayon classique r_0 de l'électron par la relation :

$$d_0 = 0,57 \cdot r_0 \cdot Z^{+1/3} \quad (7)$$

et un rayon atomique a_0 :

$$a_0 = (137)^2 \cdot r_0 \cdot Z^{-1/3} \quad (8)$$

la formule (6) reste valable dans le domaine angulaire défini par :

$$\theta_{\min} < \theta < \theta_{\max} \quad (9)$$

avec

$$\theta_{\min} = \chi/a_0 = \chi z^{1/3}/(137)^2 r_0 \quad (10)$$

et

$$\theta_{\max} = \chi/a_0 = \chi / 0,57 r_0 z^{1/3} \quad (11)$$

où χ est la longueur d'onde rationalisée ($\chi = \frac{\lambda}{2\pi}$) associée à la particule incidente.

Nous pouvons remarquer de plus que pour des angles supérieures à $\theta_{\max}$, la contribution de la section efficace différentielle à la section efficace totale est très faible. La section efficace différentielle décroît en effet, très rapidement lorsque θ augmente. De plus l'effet d'écran pour des paramètres d'impact supérieurs à a_0 a pour conséquence de faire apparaître l'atome comme une particule neutre et ne donnera pas de diffusion.

§ IV - Diffusion coulombienne multiple

Au point de vue expérimental la diffusion coulombienne multiple est un phénomène important présent dans toutes les expériences où il y a passage de particule dans un milieu matériel. Dans certain cas elle apparaîtra comme un avantage. En effet une mesure de l'angle moyen de diffusion sur la trajectoire (lorsque celle-ci est visualisée) peut servir à déterminer l'énergie de la particule. Dans d'autres cas, la diffusion coulombienne multiple a des effets perturbateurs qui pourront masquer ou déformer le phénomène que l'on veut étudier ; les perturbations ainsi apportées aux phénomènes qui nous concernent nous imposent une détermination des corrections à apporter.

1°- Théorie simplifiée ⁽⁵⁾

La théorie de la diffusion simple est régie par la formule (6) dans le domaine angulaire où la section efficace différentielle est élevée. La théorie de la diffusion coulombienne multiple importante aux petits angles peut être traitée en première approximation par une simple méthode statistique. Nous raisonnons avec une particule de charge unité, avec ou sans spin puisque l'effet de celui-ci est négligeable aux petits angles. Nous supposons de plus que sur les longueurs de matière traversée (de nombre atomique A , de masse volumique ρ) la particule possède une énergie constante (chocs élastiques sur noyau infiniment lourd).

L'angle carré moyen sur une traversée dx sera donnée par

$$\langle \theta^2 \rangle_{dx} = dx \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \theta^2 \cdot \frac{N_0 \rho}{A} \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot 2\pi \theta d\theta \quad (12)$$

où N_0 est le nombre d'Avogadro.

Soit encore

$$\langle \theta^2 \rangle_{dx} = \frac{K^2}{p^2 v^2} dx \quad (13)$$

où nous avons posé

$$K^2 = \frac{16\pi N_0 \rho}{A} \cdot Z^2 r_0^2 n_0^2 \text{Log}(181 Z^{-1/3}) \quad (14)$$

Les déviations étant petites et supposées indépendantes les unes des autres sur une longueur x nous aurons, puisque les pertes d'énergie sur cette distance sont considérées comme négligeables.

$$\langle \theta^2 \rangle_x = \frac{K^2}{p^2 v^2} x \quad (15)$$

2°- Théorie de Goudsmith et Saunderson^(6,7) et théorie de Molière^(8,9)

La formule (15) est obtenue à partir d'hypothèses restreignant sa validité ; la plus critiquable concerne le domaine angulaire restreint considéré. Goudsmith et Saunderson donnent une théorie, valable quel que soit l'angle d'émission, par développement en polynômes de Legendre de la densité de probabilité $P(\Theta)$ de diffusion dans un angle solide $d\Omega$. Les lois de la diffusion étant à symétrie cylindrique on démontre que le coefficient F_l d'un polynôme de Legendre après "n collisions" est égal à la nième puissance du coefficient du même polynôme relatif à une collision. Soit, si Θ_1 indique l'angle relatif à une collision et $P_n(\Theta)$ la densité de probabilité de diffusion après n diffusions :

$$P(\Theta_1) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \cdot F_l \cdot P_l(\cos \Theta_1) \quad (16)$$

et

$$P_n(\Theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \cdot F_l^n \cdot P_l(\cos \Theta) \quad (17)$$

La fonction de distribution $P_x(\cdot)$ totale après une traversée x de matière sera donnée par :

$$P_x(\Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_x(n) P_n(\Theta) \quad (18)$$

où $W_x(n)$ est la probabilité d'avoir n collisions sur la distance x . $W_x(n)$ sera évidemment une loi de Poisson où interviendra la section efficace totale. Goudsmith et Saunderson ont effectué les calculs dans trois cas différents :

- a) Champ coulombien à l'intérieur d'une sphère de rayon a_0 défini par l'équation (8)

b) Potentiel de la forme :

$$V(r) = \frac{Z e^2}{r} \cdot \exp(-r/a_0) \quad (19)$$

c) Enfin avec un potentiel de Thomas Fermi.

Les fonctions de distribution ainsi trouvées sont peu différentes l'une de l'autre et proches de celle obtenue par Molière^(8,9,10) qui a résolu le problème numériquement aux petits angles en considérant un potentiel de Thomas-Fermi (l'approximation de Born étant remplacée par l'approximation des hautes énergies).

En définitive nous pouvons résumer les résultats de ces diverses théories :

1°- La fonction de distribution de l'angle projeté θ_p sur un plan contenant la direction de la particule incidente est dans toutes les théories, voisine d'une fonction de distribution de Gauss. Dans la théorie de Molière elle ne s'en écarte que par une "queue" légèrement différente. Cette particularité nous permet d'appliquer une propriété des lois de Laplace-Gauss.

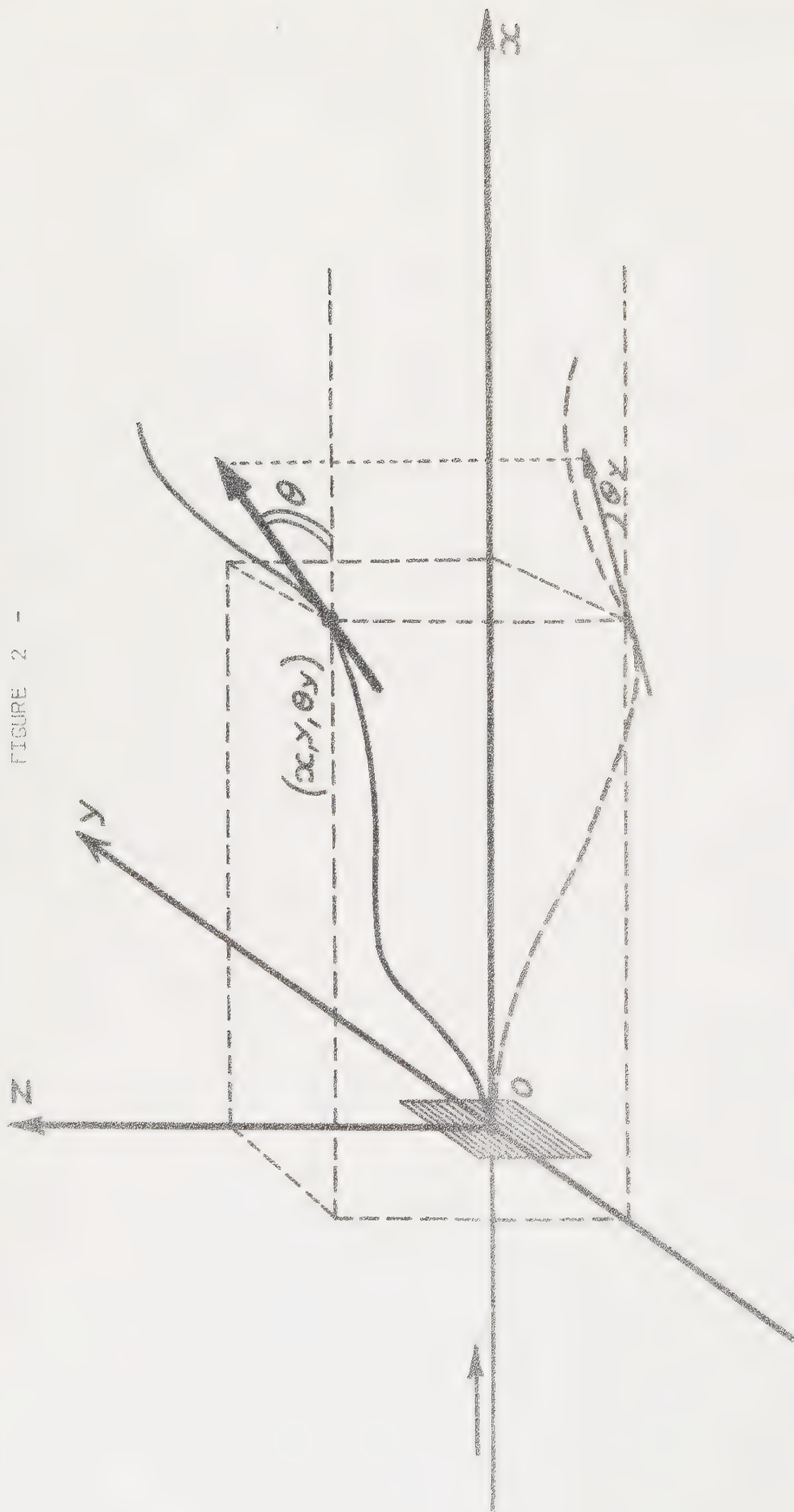
$$\langle |\theta_p| \rangle^2 = \frac{2}{\pi} \langle \theta_p^2 \rangle \quad (20)$$

2°- l'angle moyen projeté est inversement proportionnel à l'énergie pv de la particule diffusée et proportionnel à la racine carrée de la longueur de matière traversée

$$\langle |\theta_F| \rangle = \frac{K \sqrt{x}}{p \cdot v} \quad (21)$$

K est une fonction lentement variable de x et v , nous pouvons adopter pour formule donnant K dans l'émulsion nucléaire l'expression établie par Voyvodic et Pickup⁽¹¹⁾. Leur résultat a été obtenu à partir de la théorie de Willians, tout en lui combinant certains termes obtenus par Molière.

FIGURE 2 -



x est la longueur de cellule exprimée en unité de 100 microns. Il faut alors pour avoir dans la formule (21), $\langle |\theta_p| \rangle$ en degré exprimer $p.v$ en MeV et x en 100 microns. Si nous voulons $\langle |\theta_p| \rangle$ en radian nous avons avec toujours le même facteur K

$$\langle |\theta_p| \rangle_{\text{radian}} = \frac{\pi K \cdot \sqrt{x \mu}}{(pv)_{\text{MeV}} \cdot 1800} \quad (23)$$

x étant maintenant exprimé en microns.

3°- Dans tous les cas nous avons considéré l'énergie de la particule comme constante durant la traversée x .

V - Equation de transport et méthode de Lohrman⁽¹⁾

Considérons une particule incidente frappant une cible épaisse. Nous définissons un système de coordonnées rectangulaires dont l'origine O est située sur la surface d'entrée de la cible. L'axe Ox est pris parallèle à la direction de la particule incidente, l'axe des y est arbitraire (Figure 2).

Nous nous proposons de trouver la probabilité $w(x, y, \theta_y)$ $dy d\theta_y$ pour qu'une particule dont l'énergie peut varier avec la distance x , se trouve après une traversée x de matière en un point P d'ordonnée comprise entre y et $y + dy$ et dont la direction en P fait un angle projeté sur le plan Oxy compris entre θ_y et $\theta_y + d\theta_y$. Le problème a été traité par plusieurs auteurs :

- par Fermi, Rossi et Greisen⁽¹²⁾ dans le cas de la diffusion coulombienne et dans l'hypothèse de perte d'énergie négligeable ($E(x) = \text{constante}$).

- par Scott⁽¹³⁾ dans les mêmes hypothèses mais en présence d'un champ magnétique (la diffusion coulombienne se superposant avec la courbure due au champ).

- par Lohrman⁽¹⁾ enfin dans le cas général, avec application au cas des électrons pouvant perdre de l'énergie par rayonnement de freinage. Le traitement de Lohrman est un des points de départ essentiel de notre analyse expérimentale des mesures d'ouverture angulaire des paires d'électrons (e^+ , e^-).

Nous allons développer la méthode de Lohrman dans les hypothèses suivantes

1°- les angles θ_y sont toujours petits

2°- la probabilité de diffusion $P_{\Delta x}(\theta_y, E)$ d' θ_y , d'une particule d'énergie $E(x)$, après une traversée de matière x est telle que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\Delta x}(\theta_y, E(x)) d\theta_y = 1 \quad (24)$$

(condition de normalisation)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_y P_{\Delta x}(\theta_y, E(x)) d\theta_y = 0 \quad (25)$$

(symétrie de $P_{\Delta x}(\theta_y, E(x))$ par rapport à $\theta = 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_y^2 P_{\Delta x}(\theta_y, E(x)) d\theta_y = \frac{2\Delta x}{\lambda(x)} \quad (26)$$

(moyenne quadratique de θ_y
proportionnelle à Δx)

$P_{\Delta x}(\theta_y)$ étant différent de 0 pour les θ petits (hypothèse 1), nous avons donc pu étendre l'intervalle d'intégration de $-\infty$ à $+\infty$.

Nous allons établir l'équation aux dérivées partielles à laquelle $w(x, y, \theta_y)$ doit obéir. Pour cela considérons les variations que subira $w(x, y, \theta_y)$ lorsque l'on passe de x à $x + \Delta x$. Ces variations sont de deux types.

1/ Variation due à la répartition spatiale -

Nous avons :

$$w(x + \Delta x, y, \theta_y) = w(x, y - \theta_y \Delta x, \theta_y) \quad (27)$$

cette équation nous permet d'obtenir par la méthode des accroissements finis :

$$w(x + \Delta x, y, \theta_y) - w(x, y, \theta_y) = - \theta_y \Delta x \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, \theta_y) \quad (28)$$

2/ Variation dues à la répartition angulaire -

$$w(x + \Delta x, y, \theta_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y, \theta'_y) P_{\Delta x}(\theta_y - \theta'_y, E(x)) d\theta'_y \quad (29)$$

Cette expression peut être développée au voisinage de θ_y en puissance de θ'_y (les angles restant faibles). Nous conserverons dans ce développement les deux premiers termes non nuls après l'intégration, soit :

$$\begin{aligned} w(x + \Delta x, y, \theta_y) = & \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y, \theta'_y) P_{\Delta x}(\theta_y - \theta'_y, E(x)) d\theta'_y + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial w(x, y, \theta'_y)}{\partial \theta_y} \cdot (\theta_y - \theta'_y) \cdot P_{\Delta x}(\theta_y - \theta'_y, E(x)) d\theta'_y + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x, y, \theta'_y)}{\partial \theta_y^2} \cdot (\theta_y - \theta'_y)^2 \cdot P_{\Delta x}(\theta_y - \theta'_y, E(x)) d\theta'_y \end{aligned} \quad (30)$$

ou encore :

$$w(x + \Delta x, y, \theta_y) - w(x, y, \theta_y) = \frac{\Delta x}{\lambda(x)} \cdot \frac{\partial^2 w(x, y, \theta_y)}{\partial \theta_y^2} \quad (30 \text{ bis})$$

En écrivant que la variation totale est la somme des deux variations partielles nous obtenons l'équation différentielle cherchée :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \theta_y \frac{\partial}{\partial y}\right) w(x, y, \theta_y) = \frac{1}{\lambda(x)} \frac{\partial^2 w(x, y, \theta_y)}{\partial \theta_y^2} \quad (31)$$

Pour obtenir $w(x, y, \theta_y)$ nous avons donc l'équation (31) avec pour condition initiale :

$$w(0, y, \theta_y) = \delta(y) \cdot \delta(\theta_y) \quad (32)$$

où δ indique la fonction de distribution de Dirac. Il faut de plus évidemment que $w(x, y, \theta_y)$ qui représente une probabilité soit normalisée à l'unité.

Lorsque les pertes d'énergie sont négligeables sur les distances x considérées, c'est-à-dire $E(x) = \text{constante}$, $\lambda(x) = \lambda$ est une constante ; Fermi a montré que nous pouvons prendre pour solution :

$$w(x, y, \theta_y) = \frac{\lambda \sqrt{3}}{2 \pi x^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{\lambda}{x} (\theta_y^2 - \frac{3 \theta_y y}{x} + \frac{3 y^2}{x^2}) \right\} \quad (33)$$

Lohrman propose une solution dans le cas général. Il est du reste facile de vérifier qu'elle répond à l'équation aux dérivées partielles par substitution dans l'équation (31). La fonction qu'il propose et que nous utiliserons par la suite est

$$w(x, y, \theta_y) = \frac{1}{4 \pi \left\{ \varphi_1(x) \varphi_3(x) - \varphi_2^2(x) \right\}^{1/2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{\theta_y^2 \left[\varphi_1(x) - 2 x \varphi_2(x) + x^2 \varphi_3(x) \right] + 2 y \theta_y \left[\varphi_2(x) - x \varphi_3(x) \right] + y^2 \varphi_3(x)}{4 \left[\varphi_1(x) \varphi_3(x) - \varphi_2^2(x) \right]} \right\} \quad (34)$$

où les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ sont données par les intégrales

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{t^2}{\lambda(t)} dt \quad (35)$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{t}{\lambda(t)} dt \quad (36)$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \frac{1}{\lambda(t)} dt \quad (37)$$

Remarquons que la solution (34) se ramène bien à $w(x, y, \vartheta_y)$ obtenue à l'équation (33), si nous faisons $\lambda(x) = \text{constante}$.

Dans le cas particulier d'un électron, nous savons que son énergie $E(x)$ n'est pas une constante, mais varie en fonction de l'épaisseur traversée. L'électron perd de l'énergie essentiellement par rayonnement de freinage. Si $\frac{1}{l}$ est la longueur de radiation dans le matériau considéré, la loi de variation de l'énergie en fonction de l'épaisseur considérée est donnée avec une bonne approximation par :

$$E(x) = E_0 \cdot \exp(-lx) \quad (38)$$

Si nous considérons des épaisseurs Δx suffisamment faibles pour que $E(x)$ reste constant sur Δx l'expression (28) conduit avec l'aide des formules (20), (21) et (23) à :

$$\lambda(x) = \mathcal{K}^2 \cdot E^2(x) \quad (39)$$

où le facteur $\mathcal{K}$ est lié au facteur de diffusion coulombienne multiple habituel donné dans l'équation (22) par :

$$\mathcal{K} = \frac{3600}{N\sqrt{\gamma} K} \quad (40)$$

Nous pouvons maintenant calculer les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ et $\varphi_3(x)$

$$\varphi_1(x) = \left\{ \exp(2lx) \left[\frac{x^2}{2 \cdot 1} - \frac{x}{2 \cdot 1^2} + \frac{1}{4 \cdot 1^3} \right] - \frac{1}{4 \cdot 1^3} \right\} \cdot \frac{1}{E_0^2 \cdot \mathcal{K}^2} \quad (41)$$

$$\varphi_2(x) = \left\{ \exp(2 \, l x) \cdot \left[\frac{x}{2 \, l} - \frac{1}{4 \, l^2} \right] + \frac{1}{4 \, l^2} \right\} \cdot \frac{1}{E_0^2 \, \mathcal{H}^2} \quad (42)$$

$$\varphi_3(x) = \left\{ \exp(2 \, l x) \cdot \left[\frac{1}{2 \, l} \right] - \frac{1}{2 \, l} \right\} \cdot \frac{1}{E_0^2 \, \mathcal{H}^2} \quad (43)$$

La formule (34) intégrée sur θ_y nous donne la distribution du déplacement latéral

$$w_1(x, y) = \frac{1}{\left[4 \pi \left[\varphi_1(x) - 2 \, x \varphi_2(x) + x^2 \varphi_3(x) \right] \right]^{1/2}} \cdot \exp \left\{ - \frac{y^2}{4 \left[\varphi_1(x) - 2 \, x \varphi_2(x) + x^2 \varphi_3(x) \right]} \right\} \quad (44)$$

Ceci est une distribution Gaussienne. Le déplacement carré moyen $\langle y^2 \rangle$ est alors donné par :

$$\langle y^2 \rangle = \frac{1}{2 \cdot E_0^2 \, \mathcal{H}^2 \, l^3} \left\{ \exp(2 \, l x) - 2 \, x^2 l^2 - 2 \, l x - 1 \right\} \quad (45)$$

Nous pouvons avec Lohrman nous intéresser à la distribution de la distance de deux électrons d'énergie initiale E_0 et E'_0 , au bout d'une traversée x , si les deux électrons vérifient la condition initiale (32) : $w(0, y, \theta_y) = \delta(y) \delta(\theta_y)$

La fonction de distribution $w_L(y)$ est donnée par l'intégrale

$$w_L(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(x, y') \cdot w_1(x, y - y') \, dy' \quad (46)$$

qui tout calcul fait est égale à :

$$w_L(y) = \frac{1}{\sqrt{4 \pi} \left\{ \varphi^2(x) \cdot \left[\frac{1}{E_0'^2} + \frac{1}{E_0''^2} \right] \right\}^{1/2}} \cdot \exp \left\{ - \frac{y^2}{4 \, \varphi^2(x) \cdot \left\{ \frac{1}{E_0'^2} + \frac{1}{E_0''^2} \right\}} \right\} \quad (47)$$

où $\varphi(x)$ est donné par

$$\varphi(x) = \left\{ \exp(2 \, l x) - 2 \, x^2 l^2 - 2 \, l x - 1 \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{(2 \mathcal{H}^2 l^3)^{1/2}} \quad (48)$$

Si nous posons

$$E'_0 = a k \quad (49)$$

et

$$E'' = (1 - a) k \quad (50)$$

et y_0 défini par

$$y_0 = \frac{4r}{k} \frac{\varphi(x)}{k} = \left\{ \exp(2 \ln x) - 2 x^2 \ln^2 x - 2 \ln x - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{(k^2 \ln^2 x)^{1/2}} \quad (51)$$

(47) prend alors la forme :

$$w_L(y) = \frac{2 a (1 - a)}{\sqrt{\eta} \cdot y_0 \left[(1-a)^2 + a^2 \right]^{1/2}} \cdot \exp \left\{ - \frac{(2y)^2}{y_0^2} \cdot \frac{a^2 (1-a)^2}{a^2 + (1-a)^2} \right\} \quad (52)$$

Nous verrons par la suite que les équations (51) et (52) sont les points de départ de notre analyse expérimentale.

BIBLIOGRAPHIE GENERALE (notée G)

- 1 G. B. ROSSI and K. GREISEN : Rev. of Mod. Phys. 85, 91 (1952)
- 2 G. M. AVAN : Annales de la Faculté des Sciences, Clermont 2 (1962)
- 3 G. M. BLAU : Methods Experim. Phys. USA 5 A, 388 (1961)

Références

1. E. LOHRMANN : Nuovo Cimento 5, 1029 (1955)
2. E.J. WILLIAMS : Proc. Roy. A 169, 531 (1938)
3. E.J. WILLIAMS : Phys. Rev. 58, 292 (1940)
4. N.F. MOTT and H.S.W. MASSEY : The Theory of Atomic Collisions, Oxford at Clarendon Press (1949)
5. Réf. G 1, p. 262
6. S.A. GOUDSMIT and J.L. SAUNDERSON : Phys. Rev. 57, 24 (1940)
7. S.A. GOUDSMIT and J.L. SAUNDERSON : Phys. Rev. 58, 39 (1940)
8. G. MOLIERE : Z. Naturforsch 2 a, 133 (1947)
9. G. MOLIERE : Z. Naturforsch 3 a, 78 (1948)
10. H.A. BETHE : Phys. Rev. 89, 1256 (1953)
11. L. VOYVODIC and E. PICKUP : Phys. Rev. 85, 91 (1952)
12. Réf. G. 1, p. 265
13. W.T. SCOTT : Phys. Rev. 76, 212 (1949)

CHAPITRE III

CALCUL DU SPECTRE DE PHOTONS

Dans ce Chapitre nous expliquons les diverses raisons qui nous ont conduits à utiliser un faisceau de photons "durci " par passage dans une colonne d'hydrure de Lithium. Nous donnons ensuite les calculs que nous avons dû effectuer pour définir le spectre en énergie du faisceau ainsi formé.

§ I - Généralités

Si nous voulons vérifier ou utiliser la théorie d'une réaction induite par des photons, (dans notre cas la théorie de l'ouverture angulaire d'une paire de matérialisation) le problème de l'obtention du flux de photons se pose aussitôt. Pour résoudre ce problème nous disposons des solutions suivantes :

a) Les réactions nucléaires dans lesquelles un des produits finaux est un photon. Le spectre en énergie de celui-ci est alors un spectre de raies. C'est le cas par exemple des réactions^(1,2) :



Les photons ont des énergies voisines de 6 MeV pour la réaction avec le deutérium et de 22 MeV pour la réaction avec le tritium.

b) Annihilation en vol de positons monoénergétiques. Cette méthode est décrite et utilisée par Tzara⁽³⁾. L'annihilation s'effectue suivant le schéma :



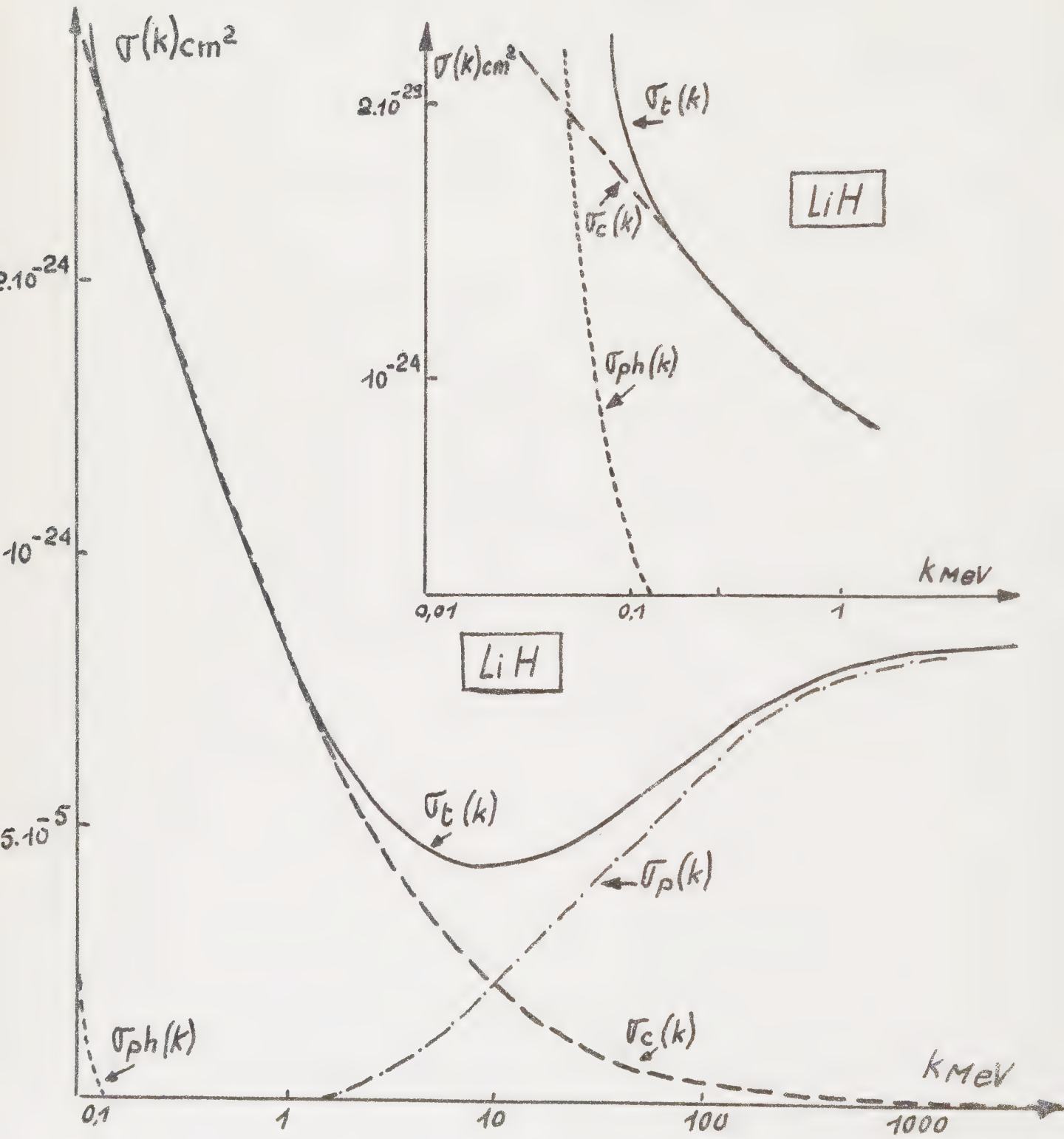
c) L'utilisation d'un faisceau de rayonnement de freinage d'électrons d'énergie déterminée. Le spectre en énergie de ces photons est un spectre continu, présentant une remontée vers les basses énergies.

d) Le marquage de photons de rayonnement de freinage par détection en coïncidence de l'électron émetteur du photon et de l'un des produits de la réaction à analyser⁽⁴⁾.

Les deux premières méthodes présentent l'inconvénient d'avoir un très faible rendement en photons. En effet, la première introduit la section efficace de la réaction nucléaire considérée, la seconde exige la production de positons mono-énergétiques et fait intervenir de plus, évidemment, leurs sections efficaces d'annihilation. La quatrième solution nécessite des dispositifs d'électronique rapide difficilement compatible avec le "temps d'occupation" relativement faible d'un accélérateur linéaire ($5 \cdot 10^{-5}$ seconde pour une seconde de fonctionnement). Elle condamne l'emploi d'émulsions photographiques nucléaires comme détecteur, car les événements seraient alors intégrés sur le temps.

Il reste la possibilité d'utiliser des faisceaux de photons produits par rayonnement de freinage. L'inconvénient majeur de tels faisceaux réside dans la nécessité d'effectuer la convolution de la section efficace du phénomène que l'on veut étudier avec le spectre en énergie des photons : ^{ceci} complique l'interprétation des résultats. D'autre part, les formules du Chapitre I nous indiquent que les sections efficaces du rayonnement de freinage sont en première approximation inversement proportionnelle à l'énergie du photon émis. Ceci entraîne une prédominance des photons de basses énergies. Ces photons "mous" sont peu intéressants en ce qui nous concerne

FIGURE 1



et de plus ils occasionnent des phénomènes parasites tels que "effet Compton" qui produisent un bruit de fond masquant le phénomène à étudier ou tout au moins gênent son observation. Nous allons maintenant décrire la solution que nous utilisons pour minimiser ces derniers inconvénients. Le problème de l'analyse des résultats est traité au Chapitre VI.

Les phénomènes produisant une perte d'énergie du faisceau de photons sont les suivants (Figure 1).

a) L'effet photo-électrique dont la section efficace $\sigma_{ph}(k)$ décroît comme $(k^{-7/2})$ (k étant l'énergie du photon) est très important pour des photons d'énergie très faible.

b) "L'effet Compton" dont la section efficace totale $\sigma_c(k)$ est donnée par intégration sur l'énergie k' et les angles d'émission du photon diffusé, de la section efficace différentielle établie par Klein-Nishina⁽⁵⁾, soit par électron :

$$\sigma(k) = 2 \pi \cdot r_0^2 \left\{ \frac{1+\gamma}{\gamma^3} - \frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \text{Log}(1+2\gamma) + \frac{1}{2\gamma} \cdot \text{Log}(1+2\gamma) - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2} \right\} \quad (1)$$

où

$$\gamma = \frac{k}{m_0} \quad (2)$$

La section efficace Compton totale $\sigma_c(k)$ décroît rapidement lorsque l'énergie du photon augmente ; remarquons qu'elle est de plus, par atome, proportionnelle au nombre atomique Z .

c) La section efficace de production de paire $\sigma_p(k)$, nulle au-dessous de 1,02 MeV croît avec l'énergie pour devenir pratiquement constante au-delà de 100 MeV où l'effet d'écran des électrons atomiques est total. La section efficace par atome est approximativement proportionnelle à $Z(Z+1)$ (Ch.I, (44) et (51 PP).

d) Les sections efficaces des autres réactions induites par des photons (photoproduction de mésons, photodésintégration, photofission ...) sont inférieures aux précédentes d'au moins d'un ordre de grandeur et nous pourrions toujours les négliger.

En définitive à très basses énergies la section efficace prédominante est celle de l'effet photoélectrique ; lorsque l'énergie du photon augmente l'effet Compton et la matérialisation prédominent tour à tour. Nous pouvons utiliser cette variation de l'absorption des photons en fonction de leur énergie pour éliminer les photons "mous". Ceci est possible par l'emploi de matériaux légers qui favorisent l'absorption Compton aux dépens de la production de paires. Le rapport $Z/Z + 1$ doit être en effet le plus grand possible.

Si nous éliminons l'hydrogène et l'hélium, qui même sous forme liquide ont une densité trop faible, l'hydrure de lithium apparaît comme le matériau le mieux adapté au durcissement du faisceau, ainsi que l'ont montré Hart et White^(6,7).

Nous éliminons donc les photons "mous" à l'aide d'une colonne d'hydrure de lithium. Mais nous devons alors calculer la nouvelle forme du spectre en énergie du faisceau de photons ainsi durci. Pour cela nous avons seulement besoin, comme donnée expérimentale, de connaître la nature et l'épaisseur du radiateur de photons (soit $0,40 \text{ gr.cm}^2$ d'aluminium) ainsi que la longueur totale d'hydrure de lithium traversée (4 m soit : $200,1 \text{ gr.cm}^2$). Le dispositif expérimental proprement dit est décrit au Chapitre IV.

§ II - Calcul du spectre "durci"

1) Spectre de photons à la sortie du radiateur

Nous avons, à l'aide des formules (44)_{RF} du Chapitre I, calculé le nombre de photons $N_R(k) dk$ d'énergie comprise entre $k - \frac{dk}{2}$ et $k + \frac{dk}{2}$ produits dans les $0,40 \text{ gr.cm}^2$ d'aluminium de la cible par des électrons d'énergie $E_0 = 200 \text{ MeV}$.

2) Etude des phénomènes prenant naissance dans l'hydrure de lithium

Nous désignons sous le nom "d'absorption" des photons tous les phénomènes précédemment décrits qui annihilent un photon ou seulement le diffusent - remarquons que dans ce dernier cas l'emploi du terme "absorption" constitue un abus de langage -

Nous portons également sur la Figure 1 la section efficace d'absorption totale :

$$\sigma_t(k) = \sigma_{Ph}(k) + \sigma_c(k) + \sigma_p(k) + \dots \quad (3)$$

Remarquons que pour des énergies supérieures au MeV $\sigma_t(k)$ est confondue avec :

$$\sigma_c(k) + \sigma_p(k) \simeq \sigma_t(k) \quad (3 \text{ bis})$$

Lorsqu'un photon est absorbé par matérialisation il est remplacé par deux électrons qui à leur tour peuvent rayonner des photons qui s'ajoutent au faisceau de photons primaires. De même lorsqu'un photon subi un processus Compton il faut lui substituer un photon d'énergie plus faible. La succession de ces phénomènes dans la matière est désignée sous le nom de "cascades électrophotoniques"^(3,9). Le phénomène de dégénérescence étant très complexe nous effectuons le calcul dans des hypothèses simplificatrices, et cela en considérant trois "étapes" ou "corrections".

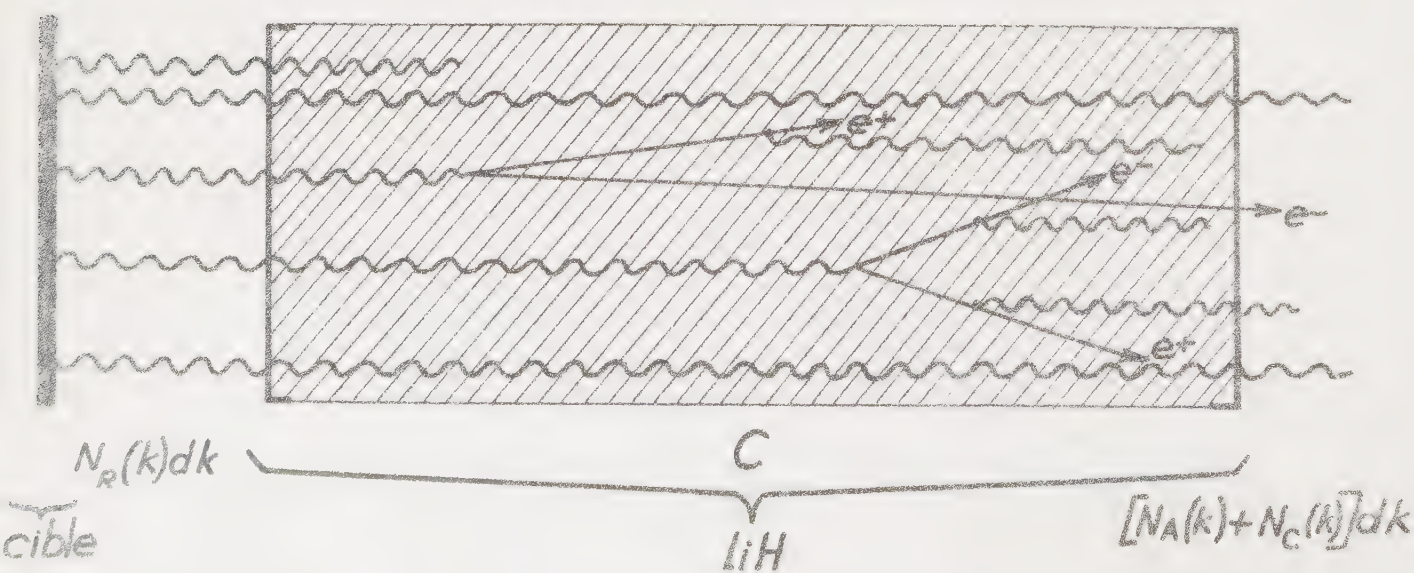
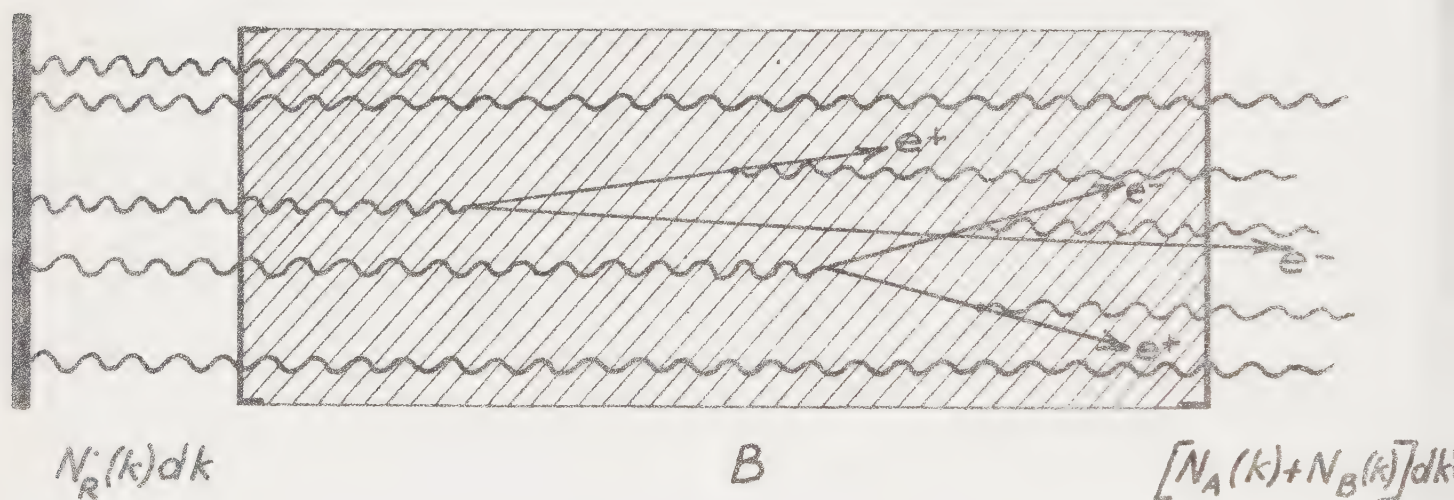
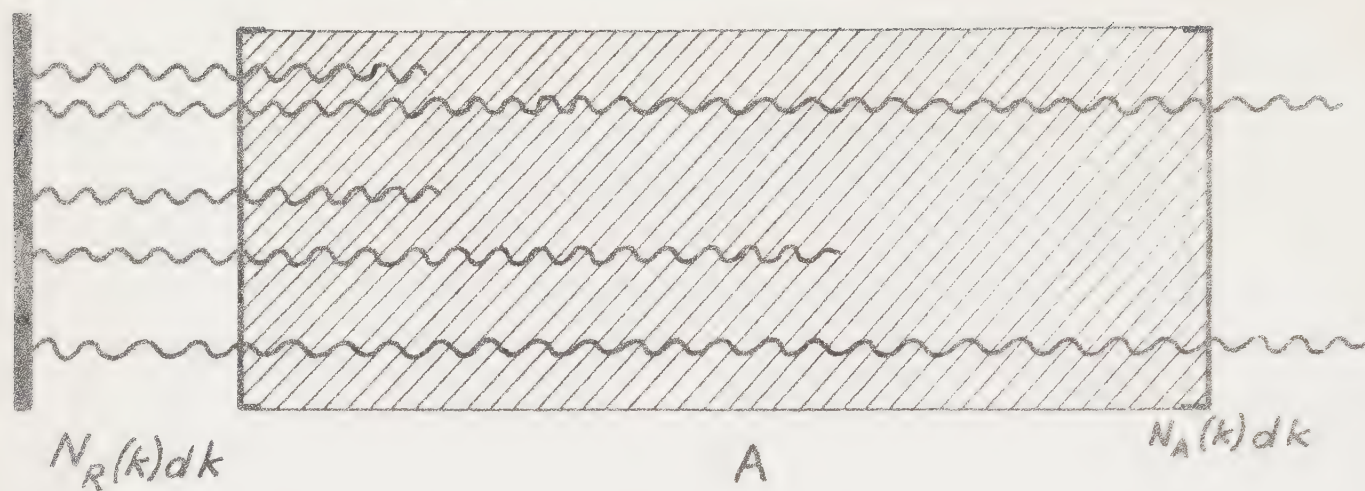


FIGURE 2 - Synoptique des calculs

A/ Le calcul est effectué en considérant que tout photon "absorbé" au sens défini au début de ce paragraphe, est enlevé du faisceau et ne peut plus intervenir (ni lui, ni les électrons qui le remplacent). Nous interdisons ainsi à la cascade de se développer. Le calcul est analogue à celui réalisé dans le cas d'une cible mince.

B/ Nous supposons que les électrons des paires de matérialisation qui ont pris naissance dans l'hydrure de lithium émettent un seul photon. Ceci reviendrait dans le cas d'une cible mince à considérer les corrections en L^2 (L étant l'épaisseur de la cible).

C/ Puis nous tenons compte des possibilités qu'ont ces photons d'être absorbés dans la colonne d'hydrure de lithium. Correction en L^3 pour les cibles minces.

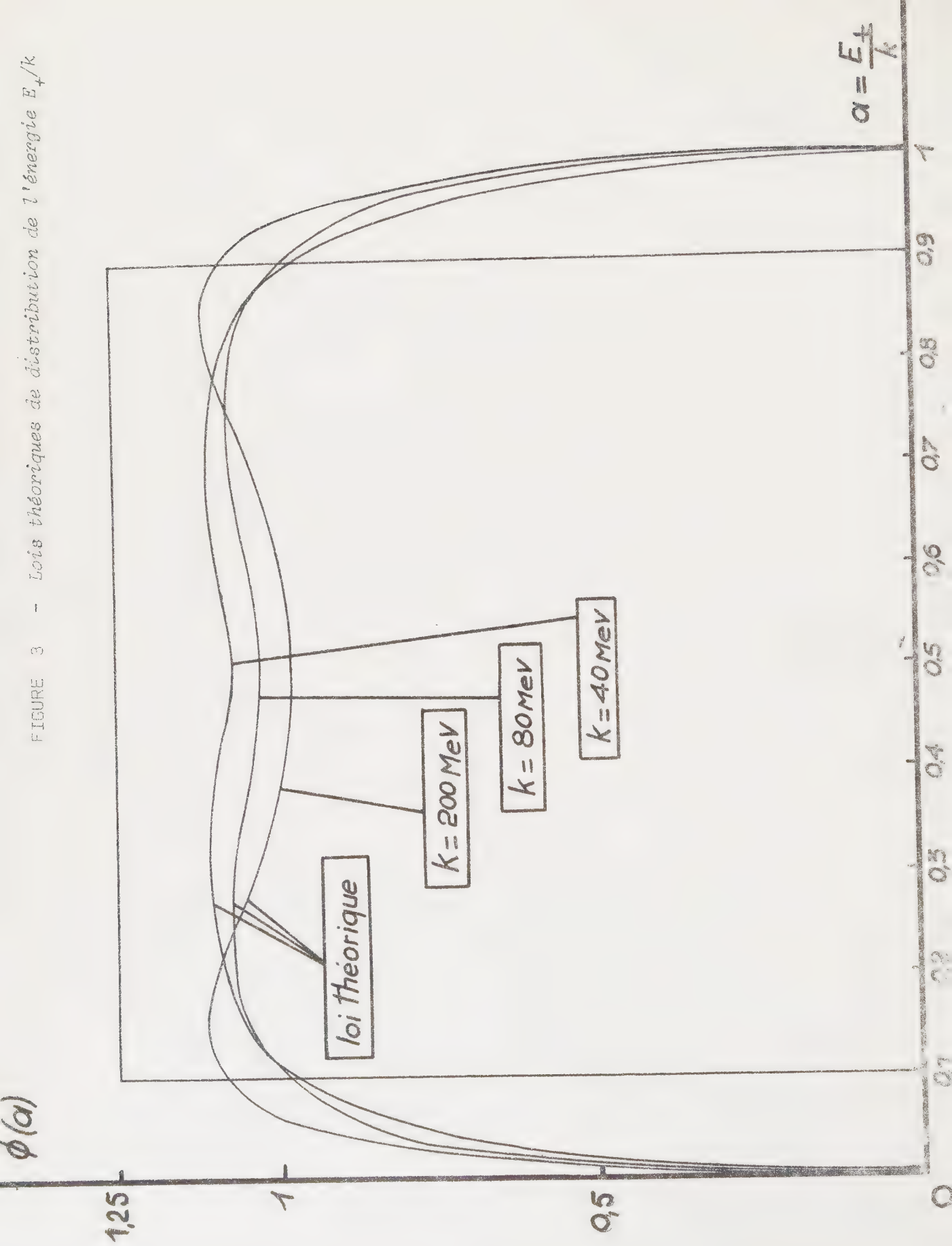
Ces trois stades sont schématisés dans la Figure 2. Nous développons maintenant les calculs effectués lors de ces trois étapes. Les notations sont les suivantes :

nombre de photons d'énergie comprise entre $k - \frac{dk}{2}$ et $k + \frac{dk}{2}$.

- produits dans le radiateur d'aluminium : $N_R(k) dk$
- obtenus à la fin de A : $N_A(k) dk$
- supplémentaires et obtenus par la correction B : $N_B(k) dk$
- supplémentaires et obtenus par la correction C : $N_C(k) dk$
- total à la fin des calculs : $N(k) dk = (N_A(k) + N_C(k)) dk$

A/ Calcul dans l'hypothèse d'une absorption totale

Nous calculons le nombre de photons $N_A(k) dk$ d'énergie comprise entre $k - \frac{dk}{2}$ et $k + \frac{dk}{2}$ qui traverse la colonne d'hydrure de lithium de longueur



$L = 200,1 \text{ gr/cm}^2$ sans subir d'interaction. Ce nombre est obtenu par la formule :

$$N_A(k) dk = N_R(k) \cdot \exp(-\tau_t(k) \cdot L) dk \quad (4)$$

avec

$$\tau_t(k) = \frac{\sigma_t(k) \cdot \mathcal{N}_0}{\mathcal{A}} \quad (5)$$

$\mathcal{N}_0$ est le nombre d'Avogadro et $\mathcal{A}$ la masse moléculaire de l'hydruure de lithium.

B/ Correction apportée à $N_A(k)$, compte tenu des électrons des paires de matérialisation.

Nous avons remplacé la loi de distribution des énergies E des électrons créés par matérialisation de photons d'énergie k -loi donnée à une normalisation près par Bethe (Formule 44, Chapitre I)- par une distribution uniforme dans l'intervalle ($E' = 0,1 k$; $E' = 0,9 k$) et nulle en dehors de cet intervalle. Nous avons (Figure 3) représenté la loi de distribution employée $\frac{dE'}{0,8 k}$ et la loi théorique.

Le nombre d'électrons $N_k(E') dE' dk$ d'énergie comprise entre $E' - \frac{dE'}{2}$ et $E' + \frac{dE'}{2}$ produit par des photons d'énergie comprise entre $k - \frac{dk}{2}$ et $k + \frac{dk}{2}$ sera donné par :

$$N_k(E') dE' dk = 2 \cdot N_R(k) dk \cdot \left\{ 1 - \exp(-\tau_p(k) \cdot L) \right\} \frac{dE'}{0,8 k} \quad (6)$$

avec

$$\tau_p(k) = \frac{\sigma_p(k) \cdot \mathcal{N}_0}{\mathcal{A}} \quad (7)$$

Le facteur 2 traduit la production de deux électrons ; et

$N_R(k) \cdot \left\{ 1 - \exp(-\tau_p(k) \cdot L) \right\}$ est le nombre de photons primaires absorbés par matérialisation.

Le nombre total d'électrons $N_e(E')$ dE' d'énergie comprise entre $E' - \frac{dE'}{2}$ et $E' + \frac{dE'}{2}$ sera obtenu par intégration de la formule (6) soit :

$$N_e(E') dE' = dE' \int_{E'}^{E_0} N_k(E') dk \quad (8)$$

Pour calculer la probabilité d'émission d'un photon pour ces électrons nous devons connaître la longueur d'hydrure de lithium qu'il traverse ; pour cela calculons la longueur moyenne l_k que les $\left\{ 2 \cdot N_R(k) \cdot (1 - \exp(-\tau_p(k).L)) \right\}$ électrons produits par des photons d'énergie k auraient à parcourir s'ils n'interagissaient plus avec l'hydrure de lithium. L'absorption des photons étant exponentielle et si l'on note par x la distance où s'effectue la matérialisation, la longueur cherchée sera donnée par :

$$l_k = \frac{1}{\left\{ 1 - \exp(-\tau_p(k).L) \right\}} \cdot \int_0^L (L-x) \cdot \tau_p(k) \cdot \exp(-\tau_p(k).x) dx \quad (9)$$

d'où après intégration

$$l_k = \frac{1}{\left\{ 1 - \exp(-\tau_p(k).L) \right\}} \cdot \left\{ \frac{1}{\tau_p(k)} \cdot (\exp(-\tau_p(k).L) - 1) + L \right\} \quad (10)$$

Or nous voulons connaître la longueur moyenne associée, non à l'énergie k du photon, mais à celle E' des $N_e(E')$ électrons ; nous devons donc calculer la moyenne de l_k sur les k distribués par $N_k(E')$

$$l(E') = \frac{1}{N_e(E')} \cdot \int_{E'}^{E_0} l_k \cdot N_k(E') dk \quad (11)$$

La connaissance de cette longueur nous permet de calculer le nombre $N_{BE}(k')dk'dE'$ de photons d'énergie comprise entre $k' - \frac{dk'}{2}$ et $k' + \frac{dk'}{2}$ que les $N_e(E')dE'$

électrons produiront sur la traversée $l(E')$. Nous utilisons la formule :

$$N_{BE}(k') dE' dk' = N_e(E') dE' \cdot \left\{ 1 - \exp\left(-\tau_R(E', k') \cdot l(E')\right) \right\} dk' \quad (12)$$

où $\tau_R(E', k')$ est la probabilité que possède un électron d'énergie E' d'émettre par rayonnement de freinage un photon d'énergie comprise entre $k' - \frac{dk'}{2}$ et $k' + \frac{dk'}{2}$ sur une longueur de dx (gr/cm²). $\tau_R(E', k')$ est calculé à partir de la section efficace donnée à la formule (44)_{RF} du Chapitre I.

Le nombre de photons d'énergie k' est alors obtenu par intégration de (12) sur E' .

$$N_B(k') dk' = dk' \int_{k'}^{E_0} N_{BE}(k') dE' \quad (13)$$

C/ Absorption des photons secondaires

Nous calculons d'une manière analogue la longueur moyenne $l_1(k')$ que les $N_B(k') dk'$ photons pourraient parcourir s'ils n'interagissaient pas. Soit :

$$l_1(k') = \frac{1}{N_B(k')} \int_{k'}^{E_0} l_{1E}(k') \cdot N_{BE}(k') dE' \quad (14)$$

ou

$$l_{1E}(k') = \left\{ \frac{1}{1 - \exp\left(-\tau_R(E', k') \cdot l(E')\right)} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{\tau_R(E', k')} \cdot \left[\exp\left(-\tau_R(E', k') \cdot l(E')\right) - 1 \right] + l(E') \right\} \quad (15)$$

Sur cette longueur $l_1(k')$ nous aurons $N_e(k') dk'$ photons qui n'aurent pas été absorbés, soit encore :

$$N_C(k') dk' = N_B(k') dk' \cdot \left\{ 1 - \exp\left[-\tau_t(k') \cdot l_1(k')\right] \right\} \quad (16)$$

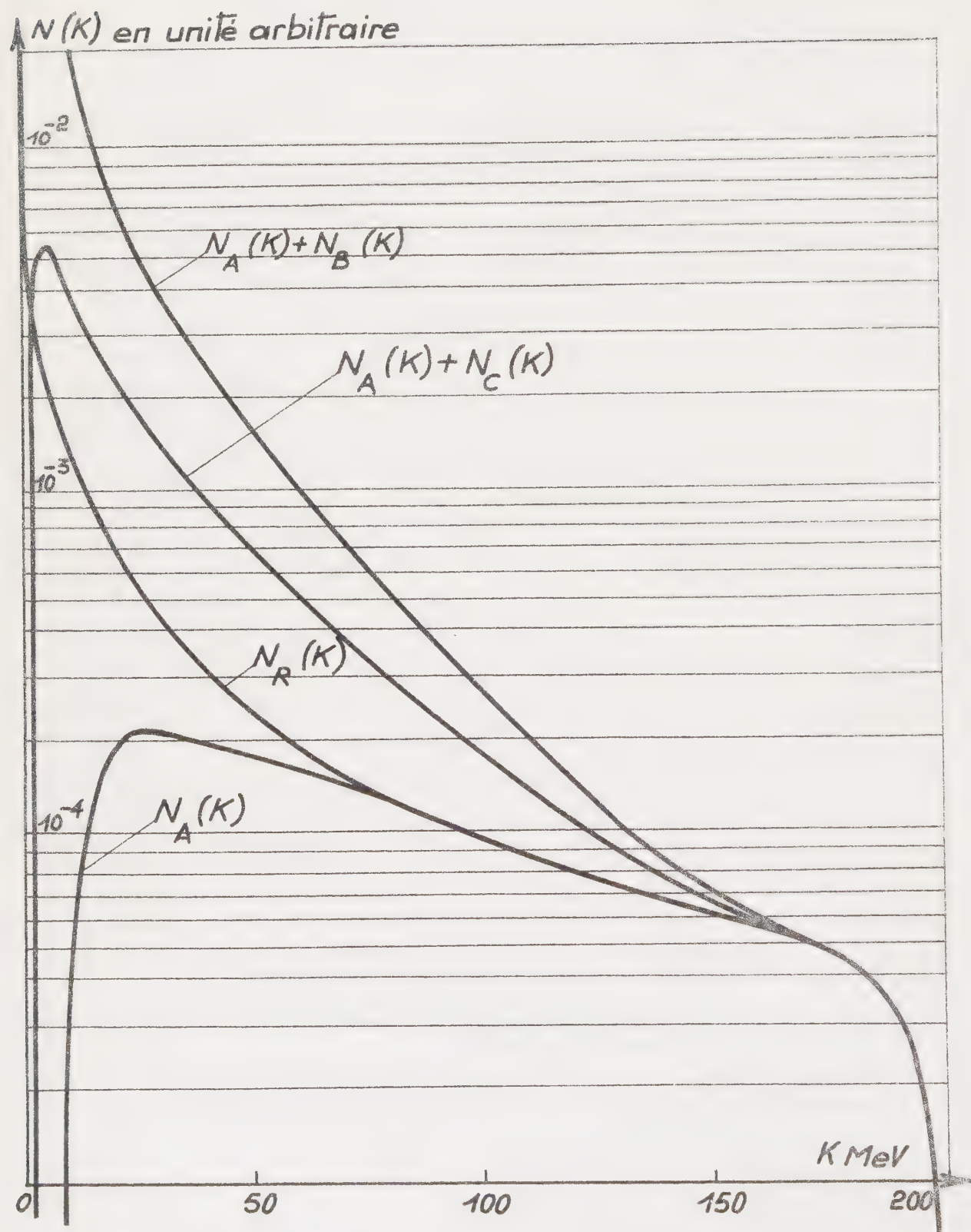


FIGURE 4

3°- Conduite des calculs

Les calculs du paragraphe précédent ont été effectués numériquement. Aux quantités infinitésimales dE ou dk , nous substituons des intervalles d'énergie ΔE ou Δk finis. Les intervalles sont de 1 MeV pour les énergies inférieures à 10 MeV et de 10 MeV pour les énergies supérieures. Les intégrations sont alors effectuées par la méthode des trapèzes. Les fonctions étant toujours lentement variables cette technique est justifiée.

4°- Résultats

Sur la Figure 4 nous avons porté :

- le nombre de photons $N_A(k) \Delta k$ qui traversent la colonne sans subir d'interaction (en unité arbitraire).

- Le nombre de photons $[N_A(k) + N_B(k)] \Delta k$ obtenu avec les corrections A et B seules.

- Le nombre de photons $N(k) \Delta k$ calculé avec toutes les corrections.

$$N(k) = N_A(k) + N_C(k)$$

- Et enfin le nombre de photons $N_R(k) \Delta k$ sortant du radiateur d'aluminium (aucune correction). Nous avons normalisé ce nombre à $N_A(k) \Delta k$ pour $k = 185$ MeV.

5°- Phénomènes négligés

Nous avons négligé divers phénomènes ou problèmes, en particulier :

- a) Le déplacement latéral de la cascade : en effet nous avons supposé que tous les produits des interactions étaient émis vers l'avant ; or nous savons que les phénomènes électromagnétiques tels que production de paires ou rayonnement de

Il est bien évident que le pourcentage de photons accepté par rapport au nombre de photons total associé à un ordre diminue rapidement lorsque cet ordre augmente.

c) Les photons Compton diffusés :

Nous avons négligé toute correction portant sur ceux-ci ; or la section efficace Compton devient importante à des énergies telles que le photon diffusé est très "mou" et de ce fait pratiquement absorbé totalement par effet photoélectrique.

d) Les pertes par ionisation :

Pour les électrons de paire de matérialisation ces pertes sont très faibles (la perte par ionisation d'un électron de 100 MeV qui traverserait toute la colonne serait de 10 MeV).

e) Les autres phénomènes qui sont, nous l'avons vu, inférieurs d'un facteur 10 ont toujours été négligés.

Nous pouvons admettre que le résultat obtenu par ce calcul simple ne doit pas être très différent du résultat cherché en particulier vers les hautes énergies ($K \gg 100$ MeV).

Références Bibliographiques

1. W.A. FOWLER, C.C. LAURISTEN, A.V. TOLLESTRUP : Phys. Rev. 76, 1767 (1949)
2. H.V. ARGO, H.T. GITTINGS, A. HEMMENDINGER, G.A. JARVIS, R.F. TASCHEK :
Phys. Rev. 78, 691 (1950)
3. J. MILLER, C. SCHUHL, G. TAMAS et C. TZARA : Journal de Physique et le
Radium, 21, 755 (1960)
4. J.S. O'CONNELL, P.A. TIPLER and P. AXEL : Phys. Rev. 126, 228 (1962)
5. W. HEITLER : The Quantum Theory of Radiation, Third edition, Oxford at
Clarendon Press, p. 221 (1953)
6. E.L. HART and D.H. WHITE : Rev. of Sci. Instrum. 31, 33 (1960)
7. J.M. SELLEN, G. COCCONI, V.T. COCCONI and E.L. HART : Phys. Rev. 113, 1323
(1959)
8. B. ROSSI and K. GREISEN : Rev. of Mod. Phys. 13, 240 (1941)
9. J.C. BUTCHER and H. MESSEL : Nucl. Phys. 20, 15 (1960)
H. MESSEL, A.D. SMIRNOV, A.A. VALOFOMEEV, O.F. CRAWFORD and J.C. BUTCHER :
Nucl. Phys. 39, 1 (1962)
D.F. CRAWFORD and H. MESSEL : Nucl. Phys. 61, 145 (1965)

CHAPITRE IV

MONTAGE EXPERIMENTAL

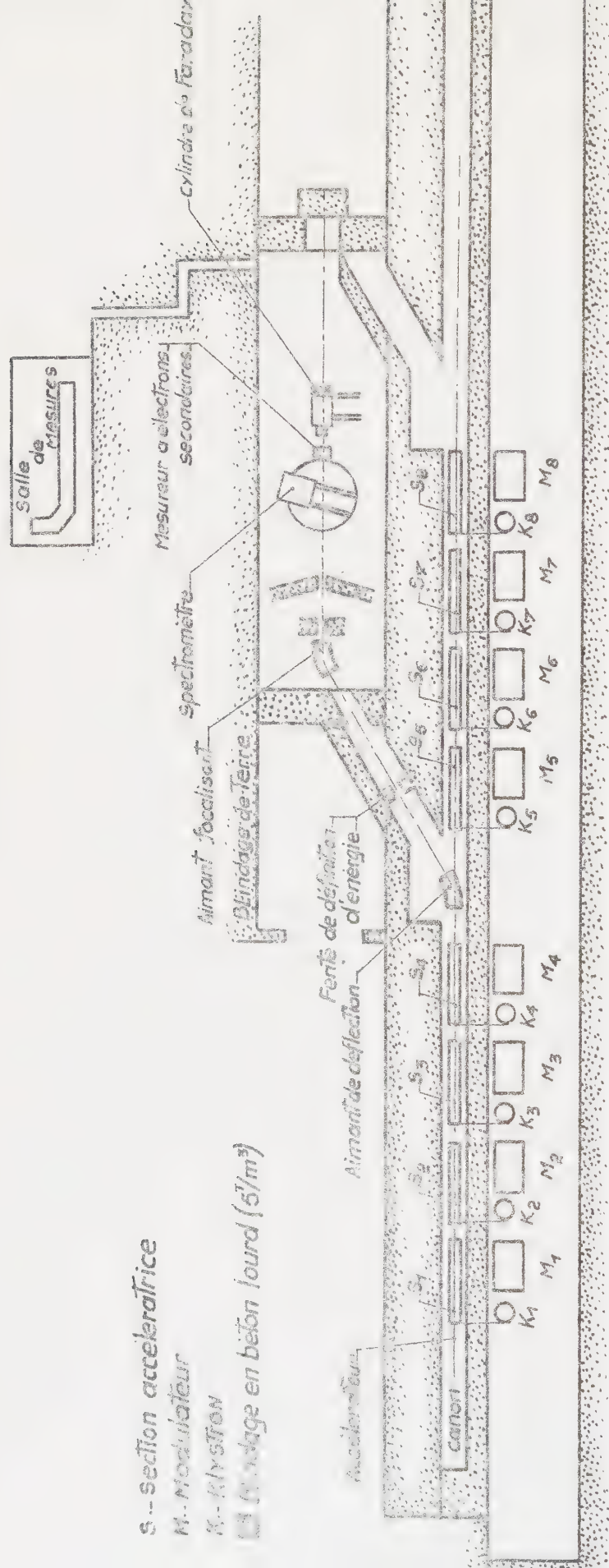


FIGURE 1 - SCHEMA DE L'ACCELERATEUR ET DE LA SALLE DE CIBLE . 250 MeV

SYSTEME DE DEFLECTION

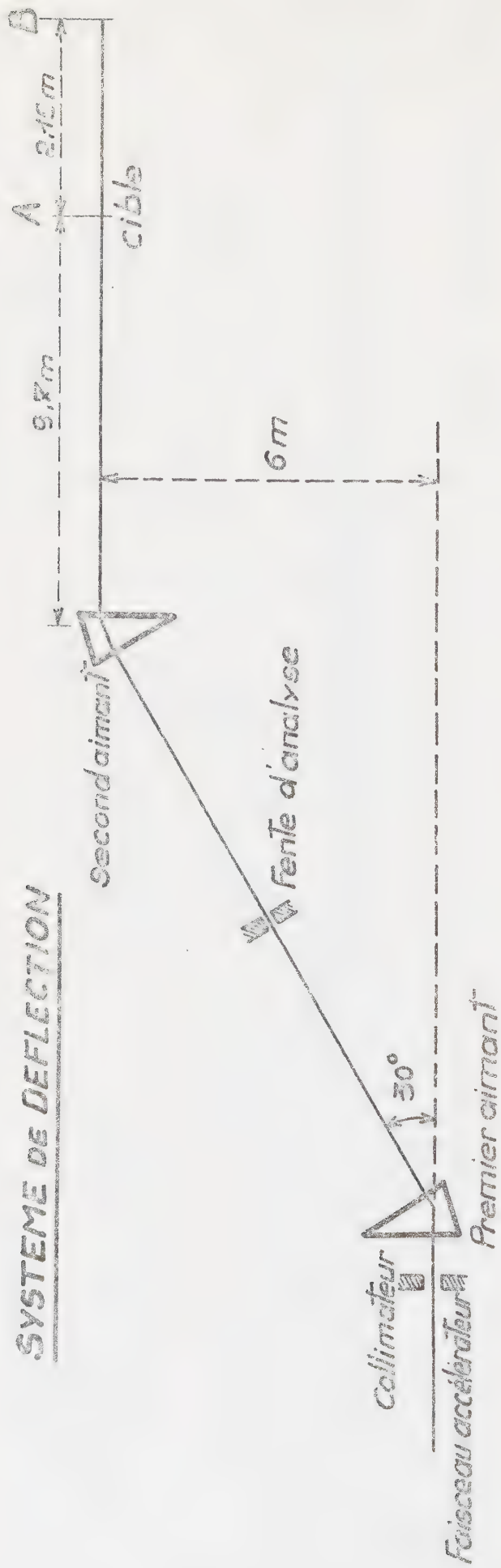


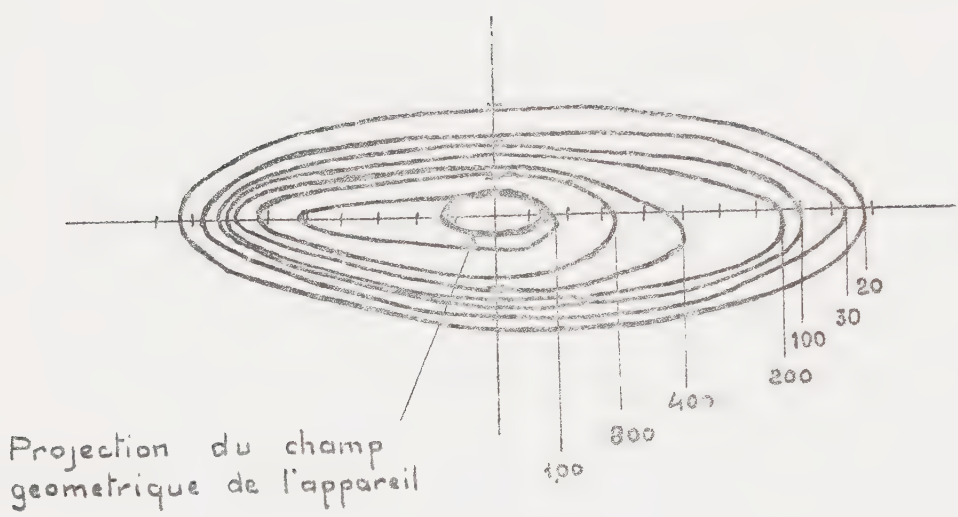
FIGURE 2

Les électrons nécessaires au travail expérimental de ce mémoire sont produits par l'accélérateur linéaire de la Faculté des Sciences d'Orsay, réalisé par la Compagnie Générale de T.S.F.⁽¹⁾. Nous utilisons la salle d'expériences de 250 MeV où aboutit le premier faisceau extrait de l'accélérateur. L'énergie des électrons qu'il est possible d'obtenir dans cette salle peut être choisie entre 50 et 250 MeV. A cette salle d'expériences correspond une salle de mesures séparée de la première par un épais blindage de béton et de terre ; les rayonnements intenses existant dans la salle d'expériences obligent en effet le physicien à contrôler ses appareils de mesure à distance. La disposition de ces deux salles par rapport à l'accélérateur est représentée sur la Figure 1.

§ I - Extraction et analyse du faisceau dévié

Le système schématisé sur la Figure 2 a pour but de réaliser l'extraction, l'analyse en énergie, et la focalisation du faisceau sur la cible. Le dispositif comprend notamment deux aimants donnant chacun une déviation de 30° ; le premier, jouant un rôle de prisme, produit une dispersion angulaire du faisceau liée à la dispersion en énergie des électrons. Le second est destiné à ramener le faisceau suivant une direction parallèle à l'axe de l'accélérateur et à assurer en partie la focalisation sur la cible. Entre les deux aimants une fente définie par deux blocs

POSITION A



POSITION B

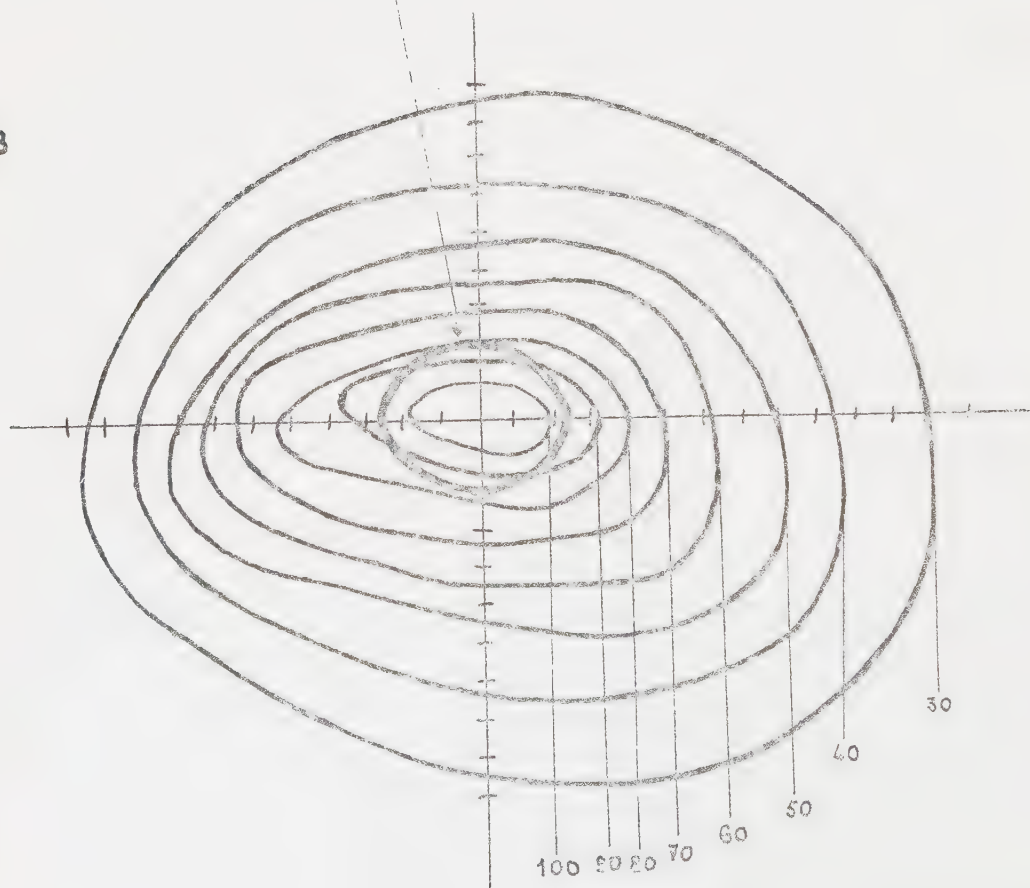


FIGURE 3

POSITION. A

INTENSITE EN
UNITE ARBITRAIRE

POSITION B

FIGURE 4

de plomb sélectionne les électrons dont l'énergie est comprise dans une bande ΔE autour de l'énergie E choisie. Le pourcentage $\frac{\Delta E}{E}$ est déterminé par la distance des deux lèvres de cette fente. Les électrons ainsi sélectionnés se focalisent sur une cible recouverte d'une matière fluorescente permettant une visualisation des dimensions du faisceau. On observe la position et les déplacements de ce spot à partir de la Salle de mesures grâce à un dispositif de télévision en circuit fermé. Ceci nous permet de contrôler le réglage et le fonctionnement de l'appareillage. De nombreuses descriptions de cet ensemble ont été publiés par ailleurs⁽²⁾. *Il nous reste à préciser une caractéristique essentielle à la réalisation de notre programme expérimental.* Il s'agit de la focalisation et de l'ouverture angulaire du faisceau nécessaire à l'évaluation du rendement en photons de notre appareillage. Dans cette phase du travail, les conditions d'utilisation de l'accélérateur étaient les suivantes : Energie des électrons 200 MeV ; la fente d'analyse est réglée pour obtenir $\frac{\Delta E}{E} = 0,15 \%$. Nous avons placé successivement aux positions A et B une émulsion nucléaire Ilford G 5 de 100 μ d'épaisseur normalement à la direction moyenne du faisceau. Après développement photographique de ces plaques une mesure de densité de traces d'électrons au microscope nous donne les sections droites du faisceau aux deux positions A et B (Figure 3). Nous avons de plus, représenté (Fig. 4) les coupes du faisceau suivant les deux diamètres maximum et minimum ; les résultats sont donnés en unité arbitraire. Le point A correspond au plan de focalisation du faisceau (cible) ; le point B est situé 215 cm en arrière de A.

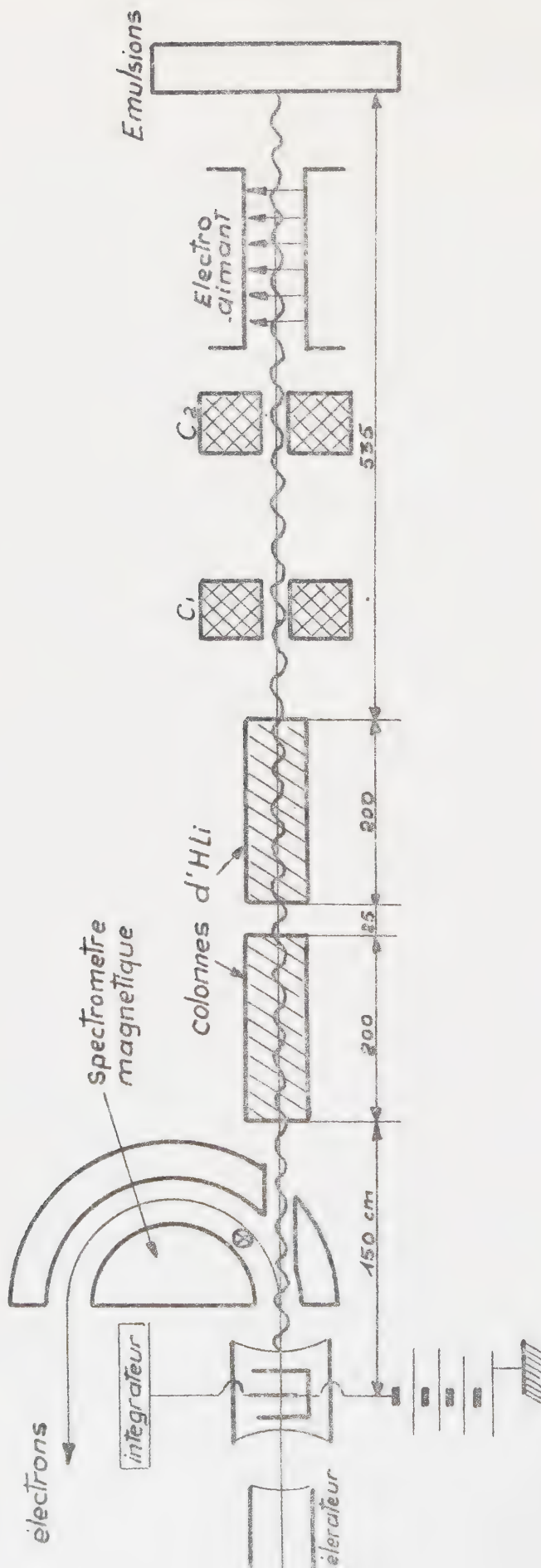


FIGURE 5 - Dispositif expérimental

Soit r le rapport des "petits diamètres" aux points A et B (pris à mi-intensité du faisceau) de ces sections droites et soit de même R le rapport des "grands diamètres" aux mêmes points. Nous pouvons avoir une idée de la section droite du faisceau en un point quelconque C. Pour cela il nous suffit de dilater la section droite obtenue au point A suivant ces deux diamètres par les facteurs $\frac{1}{r} \cdot \frac{AC}{AB}$ et $\frac{1}{r} \cdot \frac{AC}{AB}$. Inversement nous pouvons projeter le champ géométrique de l'appareillage sur une des deux sections droites en A ou B de manière à déterminer l'intensité du faisceau accepté par l'appareillage. Nous avons fait figurer sur la Figure 3 la projection du champ du collimateur C_2 , qui définit le champ de l'appareillage. Nous avons ainsi montré qu'environ 1,5 % du faisceau servent effectivement dans notre expérience. Le calcul se fait en évaluant les surfaces intérieures aux projections du champ géométrique.

§ II - Montage expérimental

La Figure 5 représente le dispositif expérimental et ses trois fonctions : Obtention du flux de photons primaires, Filtrage du faisceau de photons, détection.

1) Obtention du flux de photons primaires

Le radiateur est constitué par une cible de 1,250 mm d'aluminium et par un mesureur à électrons secondaires nécessaire à la normalisation des résultats. Nous reviendrons sur l'utilisation de ce mesureur. Nous avons choisi l'aluminium pour trois raisons :

1. C'est un matériau léger qui permet d'effectuer les calculs de rayonnement de freinage dans l'approximation de Born ;

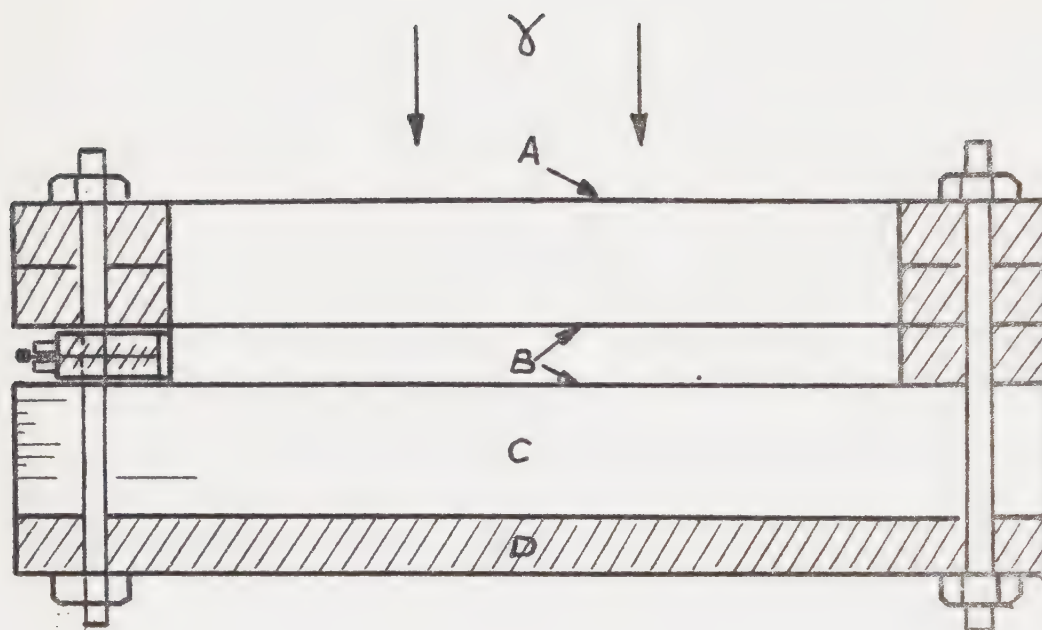
2. La nature du matériau du point de vue rayonnement de freinage est peu important, la forme du spectre différant relativement peu ;

3. Les seuls mesureurs d'électrons secondaires utilisables à Orsay sont constitués de feuilles d'aluminium. Nous n'avons donc pas intérêt à utiliser une cible de matériau composit.

La surface d'entrée de la cible est recouverte de la substance fluorescente par laquelle nous pouvons vérifier le bon réglage de l'accélérateur et du système d'extraction du faisceau. Le faisceau de photons est épuré de toutes les particules chargées par l'action du spectromètre magnétique installé dans la "Salle 250 MeV", et situé en arrière du radiateur et dans l'axe du faisceau.

2) Filtrage du faisceau de photons

Le durcissement du faisceau de photons est obtenu à l'aide de deux colonnes d'hydrure de Lithium (Figure 5) de longueur unitaire 200 cm : HLi est enfermé dans un tube d'aluminium de diamètre intérieur 3,6 cm ; les colonnes sont fermées à chaque extrémité par une fenêtre d'aluminium de 0,1 cm d'épaisseur, l'étanchéité est obtenue à l'aide d'une fenêtre de nylon d'épaisseur 0,1 cm. Les colonnes renferment à elles deux 1980 gr d'hydrure de Lithium. Nous nous sommes limités à une longueur totale de 400 cm d'hydrure de lithium, la dimension réduite de la salle d'expériences ne permettant pas une longueur supérieure.



A Feuille d'Aluminium 40 μ

B Double membrane gonflable servant à maintenir les émulsions

C Emulsions

D Plexiglass noir

FIGURE 6 - Empilement des émulsions

Deux collimateurs C_1 et C_2 de diamètre intérieur $\phi = 1$ cm font suite aux colonnes et définissent une ouverture angulaire du faisceau de $0,3 \cdot 10^{-6}$ stéradian. Ces collimateurs sont en fer, matériau pour lequel la photoproduction de neutron est faible. Leurs épaisseurs sont respectivement de 5,4 et 9,0 longueurs de radiation. Un électro-aimant situé après ces deux collimateurs élimine du faisceau de photons toutes les particules chargées qui auraient pu être produites dans les collimateurs et dans les colonnes d'hydruure de Lithium.

3) Détection

Nous avons utilisé un empilement de 32 émulsions nucléaires Ilford G 5 (épaisseur 400μ ; surface $150 \times 150 \text{ mm}^2$). L'ensemble détecteur est enfermé dans une boîte en plexiglass noir (Figure 6). Les émulsions sont appliquées les unes contre les autres à l'aide d'une membrane gonfable. Le faisceau pénètre dans le système perpendiculairement à la surface des émulsions, à travers une fenêtre d'aluminium de 40μ qui réalise l'étanchéité du détecteur à la lumière.

Les photons, depuis la sortie du radiateur jusqu'à leur entrée dans l'émulsion, parcourent 710 cm dans l'air ; la quantité de matière totale traversée, exprimée en "HLi équivalent" est de $200,1 \text{ g. cm}^2$.

La partie délicate du montage est l'alignement de l'ensemble des divers éléments du système avec l'axe théorique du faisceau d'électrons incidents. Cet

alignement a été réalisé à l'aide d'un théodolite. *L'étude des émulsions nous a montré que la répartition des photons en section droite correspond bien à une surface circulaire symétrique par rapport à l'axe théorique du système. Le diamètre (1,1 mm) est bien conforme aux prévisions géométriques. L'alignement est donc vérifié.*

§ III - Mesure de la charge transportée par le faisceau d'électrons

Nous montrerons au Chapitre VIII que le nombre d'électrons frappant le radiateur et nécessaire à une irradiation convenable des émulsions, correspond à une charge voisine de $4 \cdot 10^{-9}$ Coulomb. La mesure de cette charge est réalisée par le mesureur à électrons secondaires⁽³⁾. Celui-ci se compose de sept électrodes d'aluminium (épaisseur totale du mesureur $7 \times 0,006$ mm + deux fenêtres de $0,1$ mm = $0,24$ mm d'aluminium) dont quatre sont émettrices et portées à un potentiel négatif de 500 Volts ; les autres électrodes recueillent les électrons d'émission secondaire issus des premières. Les charges ainsi recueillies sont envoyées sur un intégrateur de courant à contre-réaction⁽⁴⁾, de telle manière que le potentiel d'entrée et par suite celui des électrodes collectrices soient maintenus à zéro.

La quantité de charge ainsi obtenue est simplement proportionnelle à la charge transportée par le faisceau d'électrons. Nous déterminons le coefficient de proportionnalité par étalonnage du mesureur par rapport à un cylindre de Faraday donnant une mesure absolue de la charge du faisceau ; ce cylindre de Faraday est

placé, lors de l'étalonnage du mesureur, derrière le spectromètre magnétique dont le champ a été au préalable remis à zéro.

Les charges reçues sur le cylindre sont envoyées sur un intégrateur identique au précédent.

Nous avons obtenu pour notre expérience un rapport de charge "cylindre/mesureur" de 7,18. L'irradiation des plaques a été sous ces conditions effectuée à partir d'un nombre d'électrons correspondant à une charge de $3,86 \cdot 10^{-9}$ Coulomb. Les temps d'irradiation étant faibles (inférieurs à la minute) nous ne tenons pas compte des fuites de charge sur les intégrateurs.

§ IV - Traitement des émulsions après exposition

L'exposition étant réalisée, l'empilement des plaques est alors démonté en chambre noire. Chaque plaque est numérotée et son épaisseur vierge mesurée en deux endroits différents à l'aide d'un comparateur gradué en microns. Ceci permet de déterminer la contraction de l'émulsion après développement et fixage. Enfin une grille de repérage (maille de 1 mm x 1 mm) est photographiée sur la surface inférieure de chaque plaque. Cette grille permet de repérer les événements indépendamment du système d'observation. Chaque pellicule est alors collée sur une plaque de verre et développée suivant la méthode du cycle de température à l'aide d'un révélateur à l'amidol^(5,7). Cette partie du travail a été réalisée au Centre de Recherches Nucléaires, Département de Physique Corpusculaire de Strasbourg-Cronenbourg avec l'aide des Chercheurs de ce Centre. Nous tenons à les remercier ici.

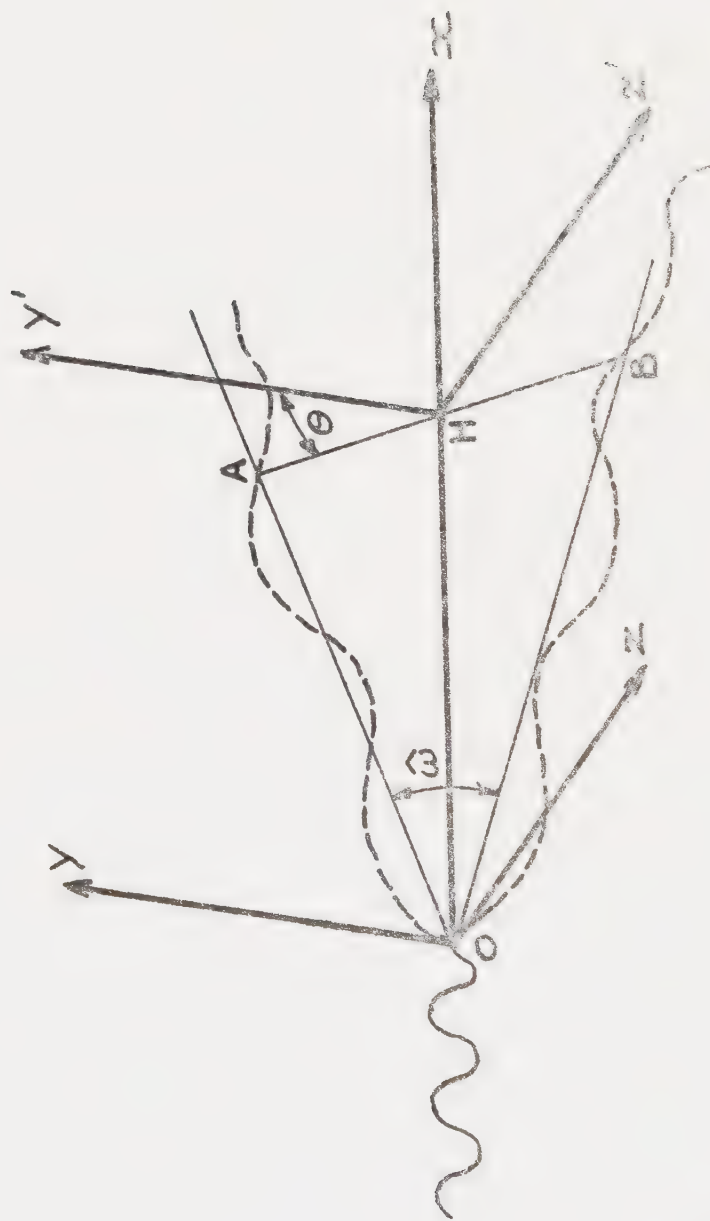
Références Bibliographiques

1. Onde Electrique, 435, 597 (1963)
2. B. MILMAN : Onde Electrique 421, 22 (1962)
3. D. ISABELLE : Onde Electrique 421, 66 (1962)
4. G.I. ALON : Onde Electrique 421, 42 (1962)
5. C. DILWORTH, G.P.S. OCCHIALINI, L. VERMAESEN, Bull, Centre Phys.
Bucl. Bruxelles 139 (1950)
6. C. DILWORTH, G.P.S. OCCHIALINI, R.M. RAYNE : Nature, 162, 102 (1948)
7. G. MEHLEMANS : Suppl. Nuovo Cimento, 12, 410 (1954)

CHAPITRE V

METHODE DE MESURES

FIGURE 1 - Trièdre attaché à une paire pour l'évaluation
des erreurs de méthodes



Nous démontrerons au Chapitre VI que nous pouvons obtenir le spectre d'ouverture angulaire initial de paires de matérialisation, si nous possédons au moins deux spectres d'ouverture angulaire $N(\hat{\omega}_1)$ et $N(\hat{\omega}_2)$ obtenus à des distances différentes. *Nous nous proposons de décrire ici comment sont effectuées les mesures expérimentales.*

Nous allons, tout d'abord, étudier les deux possibilités de mesure qui s'offrent à nous ; après, une comparaison des incertitudes des deux méthodes nous porterons notre choix sur l'une d'entre elles, en précisant toutes les opérations qu'elle nécessite ; nous donnerons enfin les résultats obtenus.

§ I - Méthode parallèle - Méthode perpendiculaire

Rappelons tout d'abord ce que nous appelons "angle d'ouverture $\hat{\omega}$ d'une paire de matérialisation à la distance x ".

Considérons un photon d'énergie k se matérialisant en un point O . Soient A et B les points où les trajectoires des deux électrons percent une sphère de rayon x' centrée en O (Figure 1). Nous appellerons "angle d'ouverture à la distance x' " l'angle $\hat{\omega} = \hat{AOB}$. Soit H le milieu de la corde AB ; nous définissons un trièdre trirectangle $Oxyz$ tel que Ox soit porté par OH et orienté de O vers H .

Les axes Oz et Oy seront définis par le système de mesure étudié plus loin.

L'angle $\hat{\omega}$ étant très petit nous pouvons assimiler la distance $x = OH$ au rayon x' de la sphère définissant A et B .

Les études relatives à la matérialisation de photons de grande énergie ($15 \text{ MeV} \leq k \leq 1000 \text{ MeV}$) dans les émulsions photographiques utilisaient précédemment la même technique expérimentale : le flux de photons incidents est parallèle à la surface des émulsions^(1 à 3). C'est ce que nous appellerons la méthode "parallèle". Dans notre expérience nous avons placé les émulsions perpendiculairement à la direction du faisceau incident ; c'est la méthode "perpendiculaire".

Pour simplifier la comparaison entre ces deux méthodes nous ferons les hypothèses suivantes :

- tous les photons incidents ont des trajectoires parallèles
- la trajectoire du photon incident se trouve dans le plan ABO
- les directions des électrons de matérialisation sont symétriques par rapport à la direction du photon incident.

Dans les deux méthodes l'émulsion est posée sur la platine du microscope d'observation qui dispose de deux mouvements croisés. Dans la méthode "parallèle" l'axe Ox est parallèle à l'un des axes de déplacement de la platine ; l'axe Oy est l'axe de visée du microscope. Dans la méthode "perpendiculaire" l'axe Oz est l'axe de visée du microscope, tandis que les axes Oz et Oy correspondent aux deux axes horizontaux de la platine.

Le faisceau de photons n'est pas polarisé, la distribution de l'angle

$\hat{\theta} = (Oy, AB)$ est donc isotrope :

$$P(\hat{\theta}) d\hat{\theta} = \frac{d\hat{\theta}}{2\pi}$$

Pour déterminer l'angle $\hat{\omega}$ nous mesurons les coordonnées des points A, B et O. Nous désignons par Δx , Δy et Δz les incertitudes de mesure sur chaque coordonnée. Nous allons calculer pour chacune des deux méthodes considérées l'influence des erreurs de mesure sur la détermination de la valeur de "l'angle d'ouverture à la distance x".

Nous posons : $HA = HB = R$ et $\operatorname{tg} \hat{\omega} \simeq \hat{\omega}$

Dans ces conditions : $\hat{\omega} = \frac{2R}{x}$

$$\frac{\Delta \hat{\omega}}{\hat{\omega}} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta R}{R}$$

soit encore :

$$\frac{\Delta \hat{\omega}}{\hat{\omega}} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\cos \hat{\theta} \cdot \Delta y + \sin \hat{\theta} \cdot \Delta z}{R} \quad (1)$$

Calculons le pourcentage de paires dont l'angle $\hat{\omega}$ est obtenu avec une incertitude inférieure à a % en définissant les valeurs de $\hat{\theta}$ satisfaisant à l'inéquation :

$$\frac{\Delta \hat{\omega}}{\hat{\omega}} < a \quad (2)$$

En raison de l'isotropie nous prenons $\hat{\theta}$ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Posons : $b = a - \frac{\Delta x}{x}$

l'inéquation (2) s'écrit en tenant compte de (1) :

$$-2 \Delta z^2 \cos^2 \hat{\theta} + 2 b R \Delta z \cos \hat{\theta} - b^2 R^2 + \Delta z^2 < 0 \quad (3)$$

$$\cos \hat{\theta} < \frac{b \cdot R}{\Delta y}$$

Si l'on désigne par $\hat{\alpha}$ l'étendue du domaine angulaire vérifiant le système (3) le

pourcentage de paires dont l'angle $\hat{\omega}$ est mesuré avec une incertitude inférieure à α % est donné par :

$$P = \frac{2\hat{\alpha}}{\pi}$$

Les mesures sont faites à l'aide d'un objectif Leitz "100 Ks" à immersion et deux oculaires micrométriques Oknor 12,5 X à tambour gradué comportant 1200 divisions, dont les échelles sont croisées. La côte verticale x est donnée par une vis micrométrique équipée d'un comparateur :

$$1 \text{ division des oculaires} : (37/1200) \mu$$

$$1 \text{ division du comparateur} : 1 \mu$$

La détermination de la côte d'un grain de l'émulsion est sujette à une incertitude de une division. En tenant compte du coefficient de contraction de l'émulsion ($\beta = 2,5$), l'incertitude sur la côte d'un point est : $\varepsilon = 1 \times 2,5 = 2,5 \mu$. L'incertitude sur la mesure des autres coordonnées d'un grain est : $\varepsilon = 0,2 \mu$.

Dans ces conditions nous avons :

- pour la méthode perpendiculaire :

$$\Delta x = 2 \times 2,5 = 5 \mu \text{ (pour déterminer } z \text{ on mesure en effet la côte de deux points)}$$

$$\Delta y = \Delta z = 0,2 \mu$$

- pour la méthode parallèle :

$$\Delta x = n \times 0,2 \mu \text{ (on déplace les micromètres } n-1 \text{ fois)}$$

$$\Delta y = 2,5 \mu \text{ (comparateur)}$$

$$\Delta z = 0,2 \mu$$

Nous avons calculé le pourcentage caractéristique P dans le cas des deux méthodes

pour une courbure moyenne $\hat{\omega} = 1$ radian.

T A B L E A U I

Méthode perpendiculaire z = 250 microns	a		6%	7%	8%	8,5%	8,8%
	P		0%	5,4%	38%	62,7%	100%
Méthode parallèle z = 250 microns	a	5%	6%	10%	20%	50 %	60,7%
	P'	0%	0,65%	5%	15,6%	56,3%	100%
Méthode perpendiculaire z = 125 microns	a	13%	14%	15%	16%	17%	17,6%
	P	0%	5,4%	20,2%	38%	62,8%	100%
Méthode parallèle z = 125 microns	a	10%	11%	20%	50%	100 %	
	P'	0%	0,5%	9,9%	21,5%	57,3%	

Valeurs du pourcentage P de paires dont l'angle est mesuré avec une erreur inférieure à a% pour les deux méthodes "perpendiculaire" et "parallèle". Le calcul est fait pour des angles $\hat{\omega}_1$ et $\hat{\omega}_2$ mesurés respectivement à des distances vraies de 125 μ et 250 μ de l'origine

Les résultats présentés dans le Tableau I font apparaitre immédiatement l'intérêt de la méthode perpendiculaire.

Nous devons signaler qu'indépendamment d'une précision moins bonne, la mesure des événements dans la méthode parallèle est entachée en général d'un biais systématique. En effet, la détermination de la coordonnée z des points A et B relative à celle du point A est très délicate : on annule systématiquement les différences $z_A - z_0$ et $z_B - z_0$ lorsque ces différences sont très voisines de zéro. Ceci a pour effet de détruire l'isotropie de $\hat{\theta}$ et de diminuer sensiblement les valeurs $\hat{\omega}$ correspondantes.

§ II - Analyse des événements

1) Recherche systématique des événements de matérialisation :

Cette recherche s'effectue au microscope Leitz Ortholux (oculaire périplan 10 X, objectif 53 KS), champ par champ, avec recouplement des champs. Dans un champ donné la recherche est effectuée par déplacement vertical de la platine ; une matérialisation apparaît ainsi comme une succession de points en forme de "V". De plus, on repère toute trace d'électrons débutant dans l'émulsion. Au moment de la mesure (effectuée avec un grossissement supérieur) nous vérifions s'il s'agit d'une trace isolée (électron Compton), d'une paire très divergente en énergie, ou d'une paire très fortement énergétique.

Lors de la recherche des événements en méthode "perpendiculaire" plusieurs paires sont simultanément visibles en totalité dans le champ du microscope ; la mesure de chacune d'elles nécessite simplement un mouvement de la vis de mise au point. Dans

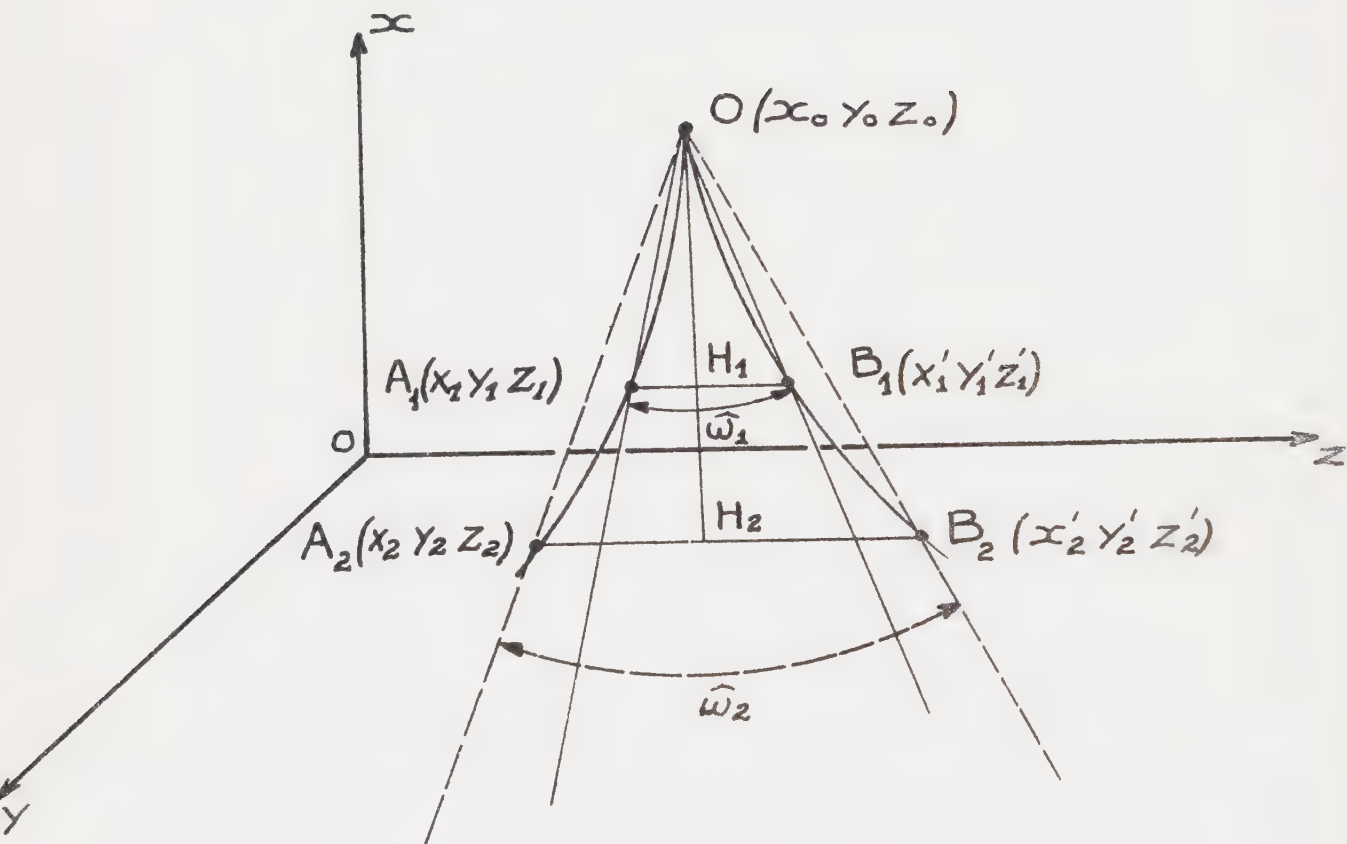


FIGURE 2 - Trièdre de mesure des paires

la méthode "parallèle" les paires de grande énergie ont une ouverture angulaire suffisamment faible pour que leur identification exige une importante translation de la platine devant l'objectif. La mesure de chaque paire nécessite donc un recadrage du champ du microscope ; d'où une perte sensible de temps.

2) Mesure de l'ouverture angulaire de la paire :

La mesure des événements impose la définition d'un repère indépendant d'une paire déterminée et peu différent du repère qui nous a permis d'évaluer les incertitudes de mesures.

Nous effectuons nos mesures par rapport à un trièdre trirectangle (Ox, Oy, Oz) lié au microscope : l'axe des x est parallèle au mouvement vertical de la platine ; les axes Oy et Oz sont parallèles à deux directions données (Figure 2).

La mesure est peu éloignée du cas théorique envisagé : en effet l'axe des x théorique est très voisin de l'axe des x de mesure : le faisceau de photons, peu divergent, est pratiquement perpendiculaire au plan de la platine ; l'origine du trièdre ne subit qu'une translation sans importance (nos calculs ne font intervenir que des différences de coordonnées).

Si nous désignons par α un coefficient qui tient compte de l'optique utilisée ($1 \mu = \alpha$ divisions) et par β le coefficient de contraction de l'émulsion, nous définissons

$$K = \alpha^2 \cdot \beta^2$$

Le coefficient α varie très légèrement d'un microscope à l'autre.

Nous supposons l'angle $\hat{\omega}$ très petit et la paire faiblement divergente en énergie. D'où :

$$\hat{\omega} = \frac{hB}{\lambda \bar{E}}$$

Pour chaque paire on mesure (dans l'émulsion contractée) les coordonnées du point O et des couples de points A_1, B_1 et A_2, B_2 . Nous obtenons ainsi deux angles $\hat{\omega}_1$ et $\hat{\omega}_2$, donnés par :

$$\hat{\omega}_1 = \left\{ \frac{4 [(y_1 - y'_1)^2 + (z_1 - z'_1)^2]}{4 K(x_1 - x_0)^2 + (y_1 + y'_1 - 2 y_0)^2 + (z_1 + z'_1 - 2 z_0)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$\hat{\omega}_2 = \left\{ \frac{4 [(y_2 - y'_2)^2 + (z_2 - z'_2)^2]}{4 K(x_2 - x_0)^2 + (y_2 + y'_2 - 2 y_0)^2 + (z_2 + z'_2 - 2 z_0)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Afin d'éliminer les événements fortuits et de rendre suffisante la différence de côté x entre les points O et B_2 nous mesurons seulement les paires dont l'origine est située dans une tranche intérieure de l'émulsion dont l'épaisseur après développement est de 120μ . Cette tranche est située entre 10μ de la surface supérieure et 40μ de la surface inférieure de l'émulsion.

La distance entre les plans parallèles à la surface de l'émulsion et passant respectivement par les points O, A_2 et B_2 sera prise aussi grande que possible tout en restant toujours inférieure à 100μ . Le plan contenant les points A_1, B_1 est dans tous les cas équidistant des deux plans précédents.

Nous avons mesuré sur six plaques différentes 15.460 paires et déterminé un coefficient moyen $\bar{K}$ pour chaque plaque.

3) Détermination de K : incertitude sur $\hat{\omega}$

Nous avons fait deux séries de mesures. Dans la première nous avons mesuré pour toutes les paires ainsi retenues les coordonnées des points O, A_1, B_1, A_2, B_2 dans la deuxième série, nous avons repris dans chaque plaque un certain nombre de paires (échantillon de quelques centaines), noté les coordonnées des points $O', A'_1,$

T A B L E A U II

Plaque N°	$\bar{K}$	Ecart-type de K	$\frac{\sigma \hat{\omega}}{\hat{\omega}}$	$(\frac{\sigma \hat{\omega}}{\hat{\omega}})_{th}$
1*	5846	1343	11,5%	12%
3	6026	1571	13 %	12%
4	6602	1391	10,5%	12%
5*	5971	1422	11,9%	12%
7	5752	1065	9,3%	12%
8	5845	1228	10,5%	12%

Valeurs de $\bar{K}$, de l'écart-type sur K et des $\frac{\sigma \hat{\omega}}{\hat{\omega}}$ théorique et expérimental pour l'angle $\hat{\omega}_1$ dans les différentes plaques

T A B L E A U III

Plaque N°	$\bar{K}$	Ecart-type de K	$\frac{\sigma \hat{\omega}}{\hat{\omega}}$	$(\frac{\sigma \hat{\omega}}{\hat{\omega}})_{th}$
1*	5652	1090	9,6%	6%
3	6002	1037	8,6%	6%
4	6082	833	6,8%	6%
5*	5768	1480	12,8%	6%
7	5740	955	8,3%	6%
8	5591	716	6,4%	6%

Valeurs de $\bar{K}$, de l'écart-type sur K et des $\frac{\sigma \hat{\omega}}{\hat{\omega}}$ théorique et expérimental pour l'angle $\hat{\omega}_2$ dans les différentes plaques

* Les mesures ont été faites sur un grand intervalle de temps

B'_1, A'_2, B'_2 (en prenant les points A'_1, B'_1 et A'_2, B'_2 aussi voisins que possible des points A_1, B_1 et A_2, B_2 pour tout événement).

Dans le premier cas l'épaisseur varie pendant la durée de l'ensemble des mesures (1 an). Dans le dernier cas, pour une même plaque, les paires sont mesurées dans un intervalle de temps tel que l'épaisseur de l'émulsion reste constante.

Pour déterminer le coefficient K associé aux premières mesures il suffit d'écrire : $\hat{\omega} = \hat{\omega}'$; la contraction se trouve implicitement éliminée de $\hat{\omega}$ grâce à l'introduction du coefficient K .

Si dans (4) nous posons :

$$U = 4 \left[(y_1 - y'_1)^2 + (z_1 - z'_1)^2 \right]$$

$$V = (y_1 + y'_1 - 2 y_0)^2 + (z_1 + z'_1 - 2 z_0)^2$$

$$W = (x_1 - x_0)^2$$

il vient :

$$\hat{\omega}'^2 = \frac{U}{4 KW + V}$$

d'où :

$$K = \frac{U}{\hat{\omega}'^2} - V \frac{1}{4 W}$$

Pour chaque paire nous déterminons deux coefficients K respectivement associés aux angles $\hat{\omega}_1$ et $\hat{\omega}_2$. Le coefficient K le plus précis est obtenu à partir des points O, A_2, B_2 : en effet, plus la côte x est grande, plus l'erreur relative faite sur x est petite. L'écart-type σ_K de K relatif aux échantillons sera donc plus faible dans ce cas. Ceci est bien confirmé par les résultats (Tableaux II et III).

Les fluctuations sur K sont liées :

- aux erreurs de mesure (microscope, opérateur)
- aux variations du coefficient de contraction pendant les mesures.

Les mesures angulaires de deux paires sont indépendantes l'une de l'autre nous pouvons déterminer l'écart-type $\sigma_{\hat{\omega}}$ de $\hat{\omega}$. V étant toujours très petit devant 4 KW , nous pouvons écrire :

$$\hat{\omega} \propto \left(\frac{U}{4 \text{ KW}}\right)^2 \quad (5)$$

d'où :

$$\frac{\sigma_{\hat{\omega}}}{\hat{\omega}} \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta K}{K}$$

4) Résultats obtenus :

La précision de ces mesures nous est donnée par le calcul précédent (§ 2) relatif à l'incertitude commise sur $\hat{\omega}$. Pour déterminer l'angle $\hat{\omega}$, nous mesurons 8 coordonnées (ces 8 mesures sont indépendantes). Nous admettons que la distribution de $\hat{\omega}$ mesuré est centrée sur le $\hat{\omega}$ réel et présente un maximum pour cette valeur.

Nous avons la possibilité de déterminer une borne supérieure $\sigma_{\hat{\omega}}|_{th}$ de l'écart-type de cette distribution en supposant une distribution uniforme dont les limites sont obtenues par l'erreur maximale. L'écart-type est égal à 0,685 fois cette erreur maximale.

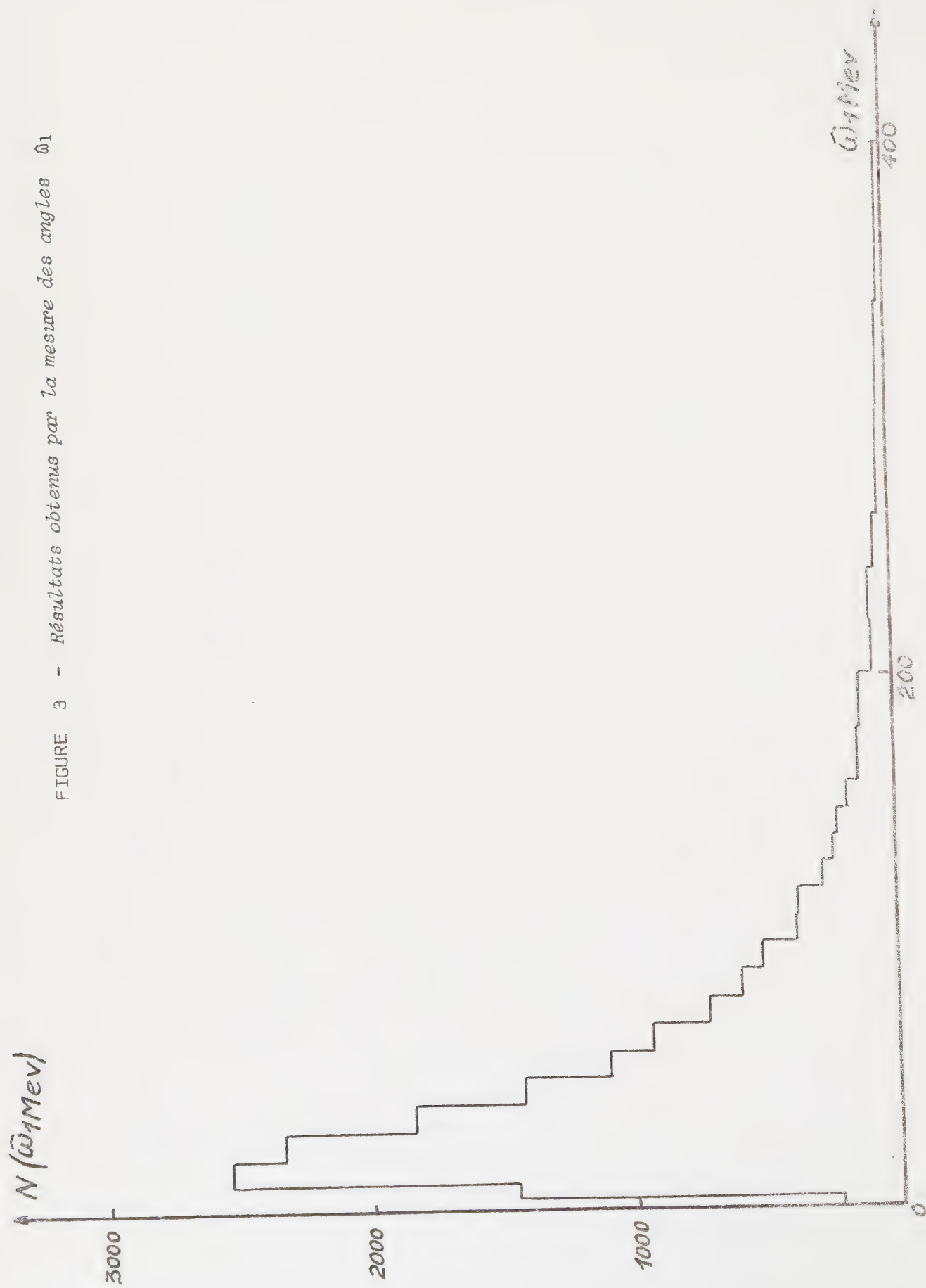
Soit :

$$\left(\frac{\sigma_{\hat{\omega}}}{\hat{\omega}}\right)_{th} = 0,685 a$$

a est la valeur de l'incertitude maximale donnée par le Tableau I pour P = 100 %.

Dans les Tableaux II et III les deux dernières colonnes donnent respectivement les valeurs de $\frac{\sigma_{\hat{\omega}}}{\hat{\omega}}$ expérimentale et théorique : dans tous les cas ces deux valeurs

FIGURE 3 - Résultats obtenus par la mesure des angles $\hat{\omega}_1$



II FIGURE 4 - Résultats obtenus par la mesure des angles $\hat{\omega}_2$

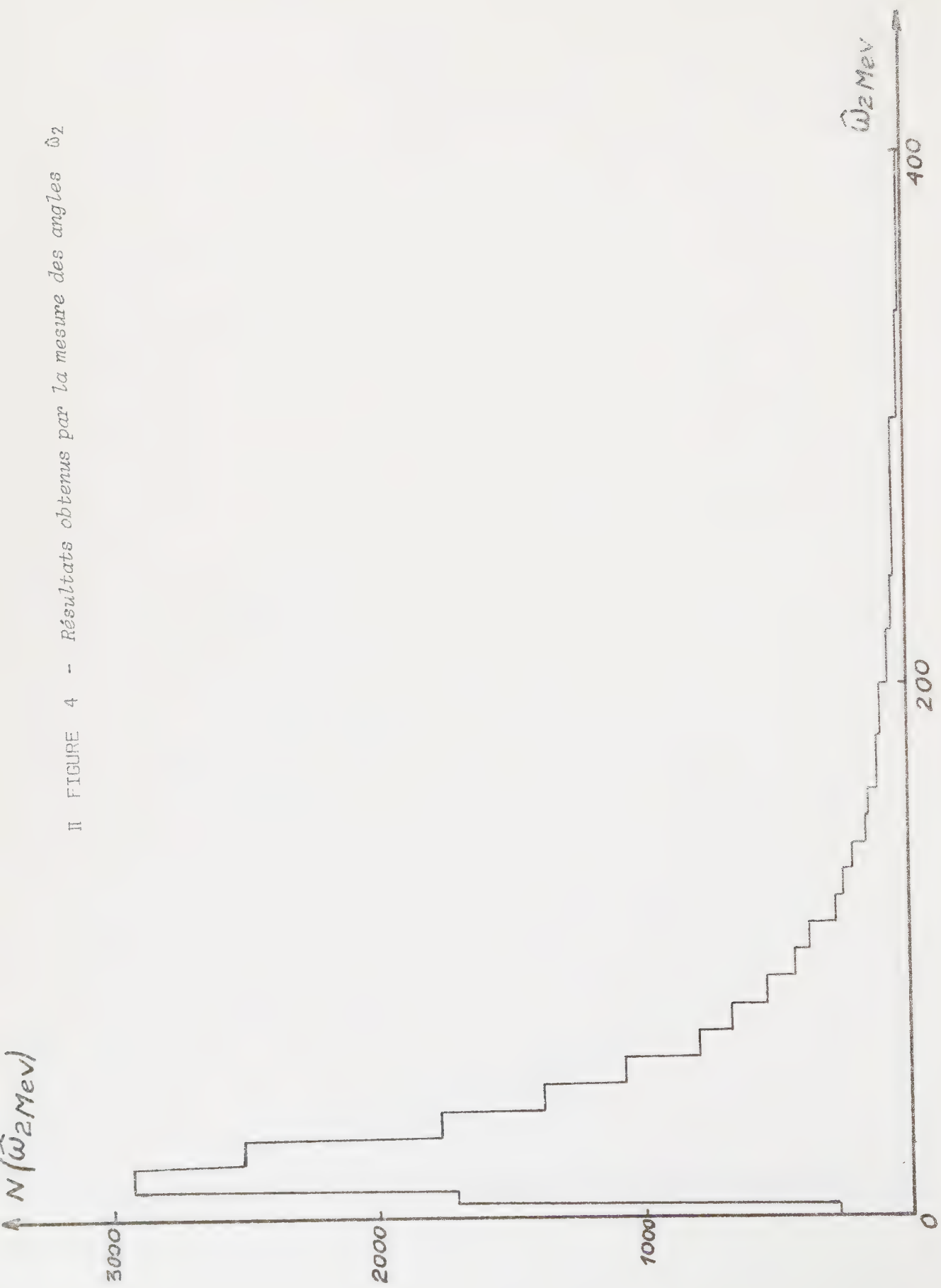
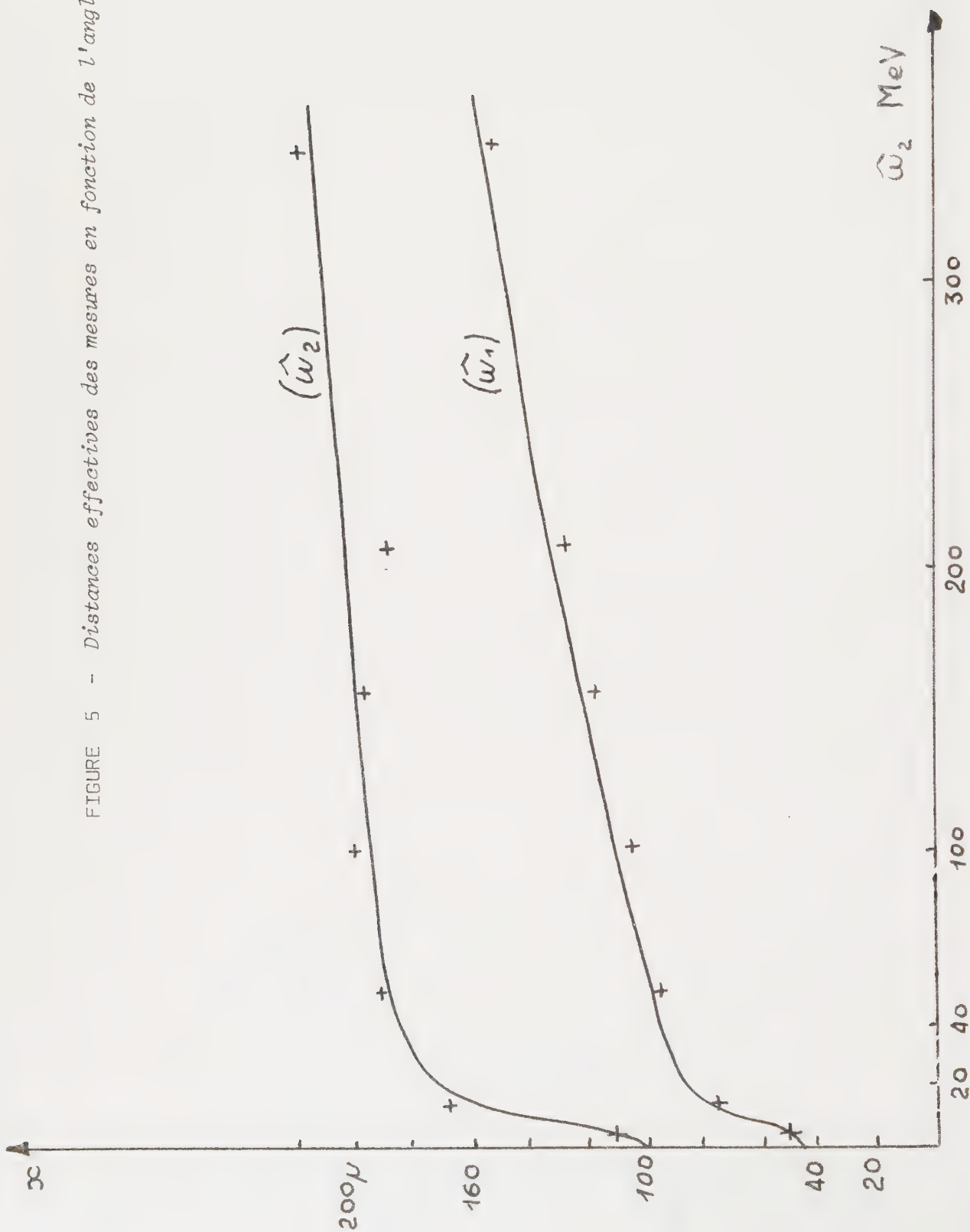


FIGURE 5 - Distances effectives des mesures en fonction de l'angle $\hat{\omega}$



sont de même ordre de grandeur, ce qui est d'ailleurs une justification à posteriori de la détermination de $\bar{K}$. En définitive, la constante $\bar{K}$ déterminée par la mesure de $\hat{\omega}_2$ étant la plus précise sera utilisée pour calculer les angles $\hat{\omega}$.

5) Résultats et Discussion des résultats

Les figures (3) et (4) représentent les spectres d'ouverture angulaire $N(\hat{\omega}_1)$, $N(\hat{\omega}_2)$ obtenus à deux distances différentes. Nous avons converti $\hat{\omega}$ en énergie par la relation $\hat{\omega}_{\text{MeV}} = \frac{m_0}{\hat{\omega}_{\text{rd}}}$. Ceci à seule fin d'obtenir un résultat plus comparable aux spectres en énergie. Nous savons en effet que l'angle d'ouverture d'une paire de matérialisation d'énergie k est de l'ordre de grandeur de :

$$\frac{m_0}{\hat{\omega}_{\text{rd}}}.$$

Les distances x_1 et x_2 de mesures ne sont pas les mêmes suivant l'ouverture angulaire de la paire. Dans le cas d'une grande ouverture angulaire il faut que la distance x_2 soit telle que la longueur A_2B_2 reste compatible avec les contraintes de l'appareil de mesure. De même pour des ouvertures angulaires faibles la distance x_1 doit être suffisamment grande pour que les points A_1B_1 soient distincts. La figure 5 représente les distances moyennes effectivement utilisées en fonction de l'angle $\hat{\omega}$.

Remarquons que l'erreur commise sur la mesure de $\hat{\omega}$ peut être assimilée à une erreur de type statistique, les fluctuations par rapport à la vraie valeur étant centrées sur zéro. Nous avons montré que l'écart-type effectivement mesuré dans la méthode perpendiculaire est compatible avec celui que nous avons trouvé, ce qui nous fournit un contrôle de la méthode d'évaluation des erreurs.

[illegible]

1. M. AVAN Annales de Physique, Masson, Paris (1955)
2. G. BARONI, A. BORSELLINO,
L. SCARSI and G. VANDERHAEGE Il Nuovo Cimento X (1953) 1653
3. K. HINTERMANN Hel. Phys. Acta, 27 (1954) 125

CHAPITRE VI

METHODE D'ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

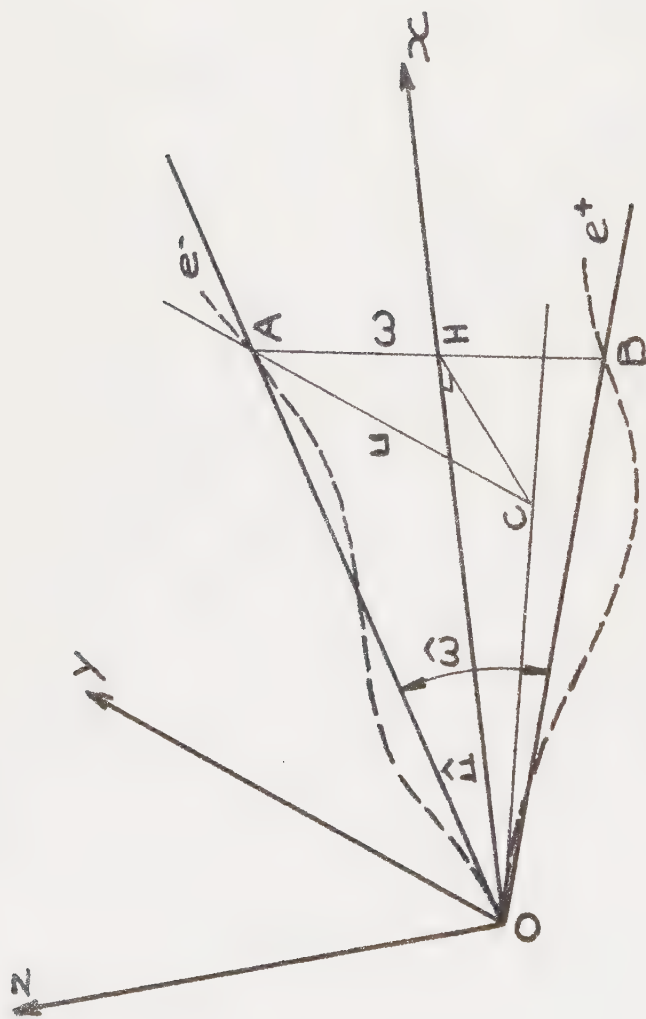


FIGURE 1 - Trièdre attaché à une paire de matérialisation et
définition des angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$

§ I - Notations utilisées

Soit un photon d'énergie k se matérialisant en deux électrons dans un milieu homogène condensé. Si O est le point de matérialisation, nous appelons "ouverture angulaire à l'origine" ou "ouverture angulaire initiale" l'angle $\hat{u}$ formé par les directions du négaton et du positon en ce point. Nous désignons par A et B les points où les trajectoires des deux électrons percent une sphère de rayon x centrée en O , et par ouverture angulaire à la distance x l'angle $\hat{\omega} = \widehat{AOB}$ (Figure 1). Si H est le milieu de AB , les angles $\hat{u}$ et $\hat{\omega}$ étant toujours faibles, nous pouvons confondre OB et OA avec OH , et écrire : $\text{tg } \hat{\omega} = \hat{\omega}$, $\text{tg } \hat{u} = \hat{u}$. Nous définissons un système de référence tel que l'axe Ox soit porté par OH et dirigé de O vers H . L'axe Oy du trièdre trirectangle direct est dans le plan d'ouverture de la paire (plan contenant les directions à l'origine des deux trajectoires).

Par convention nous notons les angles par une lettre surmontée du signe $\hat{}$. La lettre non accentuée indique le produit de l'angle par la distance x (exemple : $\omega = \hat{\omega} \cdot x = AB$). Dans la suite nous désignons par ouverture à la distance la longueur ω . De même nous définissons une ouverture à l'origine (ou initiale) rapportée à la distance x par la longueur $u = x\hat{u}$. Les termes "ouvertures angulaires" se rapportent exclusivement à des angles.

§ II - But et Méthode

Considérons une distribution ou spectre en énergie $N(k)$ de photons ; celle-ci après traversée d'un milieu homogène, fournit un spectre en énergie de paires de matérialisation $N_p(k)$. ($k = E_+ + E_-$; E_+ et E_- sont les énergies du négatron et du positron). A ce spectre $N_p(k)$ correspond un spectre d'ouverture angulaire initial $N(\hat{u})$. Expérimentalement l'accès à $N(\hat{u})$ nous est interdit. La diffusion coulombienne et le rayonnement de freinage transforment ce spectre en des spectres $N(\hat{u})$ où $\hat{u}$ est l'angle observé à la distance x . Nous pouvons expérimentalement mesurer l'angle $\hat{u}$ à p distances x_i différentes ; à chacune des distances x_i correspond un spectre $N_i(\hat{u})$.

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, connaissant p spectres $N_i(\hat{u})$, de remonter au spectre $N(\hat{u})$.

Nous montrerons que la connaissance de $N(\hat{u})$ peut se ramener à la résolution d'un système d'équations linéaires à p inconnues de la forme :

$$\hat{N}_i(\hat{u}) = \sum_{j=1}^p \hat{C}_{j,i}(\hat{u}) \frac{\lambda^{j-1} N(\hat{u})}{\delta \hat{u}^{j-1}} + F_i$$

où $\hat{N}_i(\hat{u})$ est une quantité calculable à partir de $N_i(\hat{u})$, de $\hat{u}$ et de la distance x_i ; $\hat{C}_{j,i}(\hat{u})$ est une fonction de $\hat{u}$ et de x_i ; F_i est un terme qui tend vers 0 lorsque p croît.

Nous appliquerons ce résultat en nous bornant à un système de deux équations à deux inconnues, les spectres expérimentaux $N_1(\hat{u})$ et $N_2(\hat{u})$ étant obtenus pour deux distances x_1 et x_2 .

§ III - Diffusion coulombienne multiple - Rayonnement de freinage

La distance $w_L(y)$ de la projection y de l'ouverture sur l'axe Oy en fonction de la distance x comptée à partir de l'origine de la paire (e^+ , e^-), en négligeant l'ouverture initiale ($\hat{u} = 0$), est donnée par Lohrman (Formule 52 Ch. II)

$$w_L(y) dy = \frac{2 a (1 - a)}{(\gamma y_0^2 [a^2 + (1 - a)^2])^{1/2}} \cdot \left\{ \exp - \left(\frac{2 y}{y_0} \right)^2 \frac{a^2 (1 - a)^2}{a^2 + (1 - a)^2} \right\} dy \quad (1)$$

avec :

$$y_0 = \frac{2 \sqrt{2}}{k \mathcal{K} l^{3/2}} \left\{ \exp (2 l x) - 2 x^2 l^2 - 2 l x - 1 \right\}^{1/2} \quad (2)$$

k : énergie du photon initial

l : longueur de radiation

$a = \frac{E_+}{k}$: facteur de divergence énergétique

$\mathcal{K}$: est une constante liée à la diffusion coulombienne multiple. Elle peut être déterminée en comparant la valeur $\bar{y}_L = \langle y^2 \rangle^{1/2}$ relative au déplacement carré moyen par diffusion coulombienne multiple et rayonnement de freinage d'électrons d'énergie E_0 (Form.45, Ch.II), avec la valeur $\bar{y}_M = \sqrt{\langle y^2 \rangle} \approx \sqrt{\frac{\hbar^2}{2}}$ de la théorie de Molière (Formule 23, Ch. II). Pour cela considérons une petite longueur telle que

$$2 l x \ll 1 \quad (\text{les pertes par rayonnement de freinage}$$

sont alors négligeables).

Dans ce cas :

$$\bar{y}_L = \frac{1}{E_0 \mathcal{K} \sqrt{2} l^{3/2}} \left\{ \exp (2 l x) - 2 x^2 l^2 - 2 l x - 1 \right\}^{1/2}$$

est équivalent à :

$$\bar{y}_L = \frac{2 x \sqrt{x}}{E_0 \mathcal{K} \sqrt{6}}$$

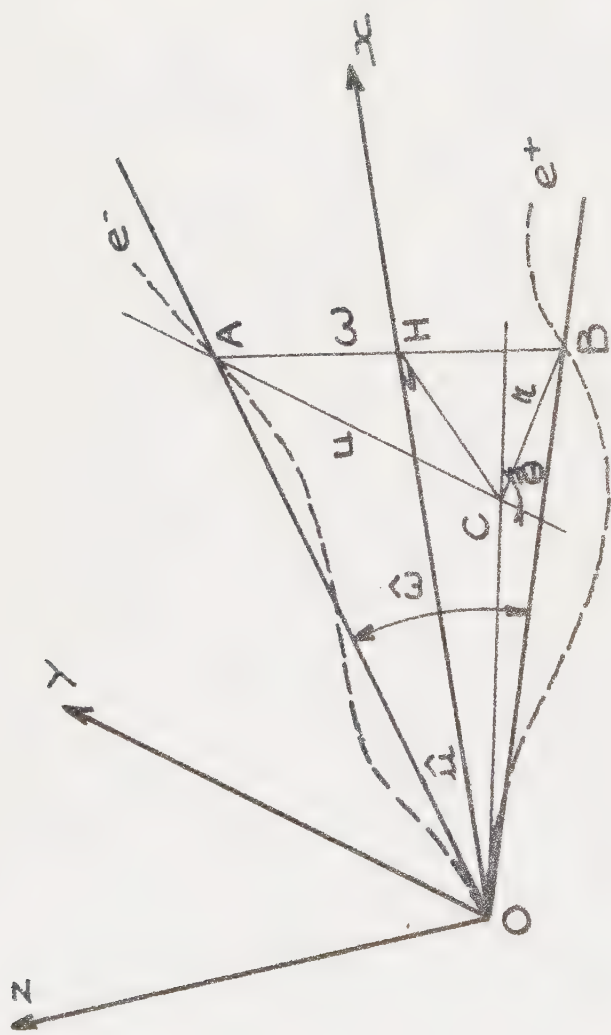


FIGURE 2 - Représentation d'une paire de matérialisation dans le cas d'une ouverture initiale u et d'une ouverture r due à la diffusion coulombienne multiple et au rayonnement de freinage

et

$$\bar{y}_M = \frac{\pi x \sqrt{x}}{1800 E_0} K \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

K est la constante habituelle de diffusion coulombienne multiple.

Avec $\bar{y}_L \simeq \bar{y}_M$ Nous avons :

$$K = \frac{3600}{\pi \sqrt{\pi} \sqrt{3} K} \quad (3)$$

La formule (1) peut s'écrire :

$$w_L(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \cdot \left\{ \exp(-y^2/2\sigma^2) \right\} dy \quad (1 \text{ bis})$$

où nous avons posé :

$$\sigma^2 = \frac{a^2 + (1-a)^2}{2^3 a^2 (1-a)^2} \cdot y_0^2 \quad (4)$$

Nous définissons une probabilité $P(\vec{r}) d\vec{r}$, probabilité de passer d'une trajectoire électronique à l'autre après une distance x par une translation comprise entre $\vec{r}$ et $\vec{r} + d\vec{r}$ [$r = |\vec{r}| = AB$, $\hat{\theta}$ angle de AB avec l'axe Oy (Figure 2)]. Cette probabilité est égale au produit de $w_L(y) dy$ par $w_L(z) dz$

Nous avons :

$$P(\vec{r}) d\vec{r} = w_L(z) w_L(y) dz dy = w_r(r) w_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}) d\hat{\theta} dr \quad (5)$$

$w_r(r) dr$: distribution de l'ouverture due à la diffusion coulombienne multiple et au rayonnement de freinage après une distance x .

$w_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}) d\hat{\theta}$: distribution de l'angle $\hat{\theta}$.

Si le faisceau de photons n'est pas polarisé et si la matérialisation n'induit pas de polarisation la distribution en $\hat{\theta}$ est isotrope.

$$w_{\hat{\theta}}(\hat{\theta}) d\hat{\theta} = \frac{1}{2\pi} d\hat{\theta}$$

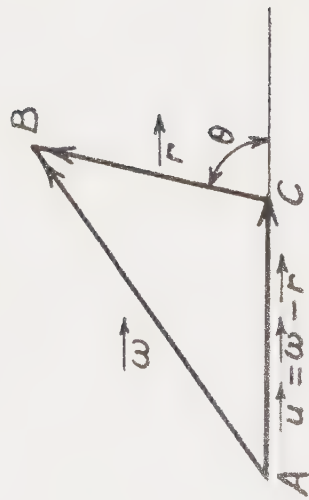


FIGURE 3 - Composition des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{r}$

En identifiant - compte tenu de : $dx dy = r dr d\hat{q}$ - on obtient pour $w_r(r) dr$:

$$w_r(r) dr = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) r dr$$

$w_r(r)$ est bien alors la distribution de l'ouverture, relative à deux trajectoires d'électrons d'une paire de matérialisation due à la superposition de la diffusion coulombienne multiple et du rayonnement de freinage : l'ouverture angulaire initiale $\hat{u}$ étant considérée comme nulle.

§ IV - Ouverture angulaire initiale : $\vec{u}$, contribution de la diffusion coulombienne multiple et du rayonnement de freinage : $\vec{r}$

Supposons un spectre de photons de matérialisation de divergence énergétique fixe $a = \frac{E_+}{k}$ qui donne à une distance x_i un spectre $n_i(\omega)$ d'ouverture observée $\omega = |\vec{\omega}(x_i)|$ correspondant à un spectre d'ouverture initiale $n(u)$ tel que $n(u = x_i \hat{u}) = n(u)$. (Figure 3)

Nous avons :

$$\vec{\omega} = \vec{u} + \vec{r}$$

Nous obtenons :

$$n_i(\omega) = \int_{\vec{r}} n(|\vec{r} - \vec{\omega}|) P(\vec{r}) d\vec{r} \quad (6)$$

Nous développerons $n(|\vec{r} - \vec{\omega}|)$ en série de Taylor autour d'une valeur Ω ; nous justifierons ensuite l'expression ainsi obtenue pour $n_i(\omega)$.

1/ Choix de Ω

Ecrivons (6) sous la forme :

$$n_i(\omega) = \int_{\vec{r}} n(\Omega + \varepsilon) P(\vec{r}) d\vec{r}$$

où $\Omega = |\vec{r} - \vec{\omega}| - \varepsilon$.

Nous choisissons Ω de telle sorte que ε soit nul lorsque r est égal à σ , et que θ prenne sa valeur moyenne $\theta = \frac{\pi}{2}$ (Figure 3).

$$\Omega = |\vec{r} - \vec{\omega}| = \sqrt{\omega^2 - \sigma^2}$$

Ceci revient physiquement à développer, non pas autour de ω , mais autour d'une valeur plus voisine de la valeur initiale ω puisque $\sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|}$ est obtenue en retranchant quadratiquement à l'ouverture observée ω^2 l'ouverture carrée moyenne σ^2 qui représente l'intervention de la diffusion coulombienne multiple et du rayonnement de freinage. Nous développons donc autour de la valeur de l'ouverture considérée par de nombreux auteurs comme une approximation satisfaisante^(1,2).

2/ Développement de $n(|\vec{r} - \vec{\omega}|)$ et de $n_i(\omega)$

Nous pouvons écrire (6) sous la forme :

$$n_i(\omega) = \int_{\vec{r}} n(\sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|} + |\vec{r} - \vec{\omega}| - \sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|}) P(\vec{r}) d\vec{r}$$

Nous supposons $n(\omega)$ régulier et dérivable p fois dans l'intervalle $[0, \infty]$

ou encore :

$$\frac{\partial^p n(\omega)}{\partial \omega^p} \text{ fini quel que soit } p. \quad (7)$$

Nous pouvons donc écrire $n_i(\omega)$ sous la forme :

$$n_i(\omega) = \sum_{p=0}^{\infty} I_{p,i} \cdot \frac{\partial^p n(\sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|})}{\partial (\sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|})^p} \quad (8)$$

où :

$$I_{p,i} = \int_{\vec{r}} \frac{(|\vec{r} - \vec{\omega}| - \sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|})^p}{p!} \cdot p(\vec{r}) d\vec{r} \quad (9)$$

soit encore :

$$I_{p,i} = \frac{\sigma^p}{2\pi p!} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \xi (\sqrt{v^2 + \xi^2} - 2v\xi \cos \hat{\theta} - \sqrt{v^2 - 1})^p e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi d\hat{\theta} \quad (10)$$

où nous avons remplacé $|\vec{r} - \vec{\omega}|$ par sa valeur : $|\vec{r} - \vec{\omega}| = \sqrt{r^2 + \omega^2 - 2r\cos\hat{\theta}}$.

Nous utilisons des variables sans dimensions $v = \frac{\omega}{\sigma}$, $\xi = \frac{r}{\sigma}$, $\eta = \sqrt{v^2 - 1}$.

Vérifions que $\sum_{p=0}^n I_{p,i} \frac{\partial^p n(\sqrt{\omega^2 - \sigma^2})}{\partial (\sqrt{\omega^2 - \sigma^2})^p} = \sum_{p=0}^n I_{p,i} \frac{\partial^p n(\sigma\eta)}{\sigma^p \partial \eta^p}$

converge lorsque n tend vers l'infini.

Pour cela nous savons par hypothèse (formule 7) que $\frac{\partial^p n(\eta\sigma)}{\sigma^p \partial \eta^p}$ est fini pour $\sigma\eta > 0$.

Décomposons $I_{p,i}/\sigma^p$ en deux fonctions J_p et F_p

$$I_{p,i} = \sigma^p (J_p + F_p)$$

où

$$J_p = \frac{1}{p! 2\pi} \cdot \int_0^N \int_0^{2\pi} \xi (\sqrt{v^2 + \xi^2} - 2v\xi \cos \hat{\theta} - \sqrt{v^2 - 1})^p e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi d\hat{\theta}$$

et

$$F_p = \frac{1}{p! 2\pi} \int_N^\infty \int_0^{2\pi} \xi (\sqrt{v^2 + \xi^2} - 2v\xi \cos \hat{\theta} - \sqrt{v^2 - 1})^p e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi d\hat{\theta}$$

La première limite d'intégration N est choisie très supérieure à v : $N \gg v$.

Nous pouvons dans le cas de la première fonction, puisque $0 \leq \xi \leq N$ et $N \gg v$, majorer $\xi \cdot \left| \sqrt{v^2 + \xi^2 - 2v\xi \cos \theta} - \sqrt{v^2 - 1} \right|$ par un nombre positif fini : $D(v)$.

Nous avons alors :

$$|J_p| < \frac{1}{p!} \int_0^N D^p(v) e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi = \frac{D^p(v)}{p!} \cdot \left\{ 1 - e^{-\sqrt{N}} \right\} < \frac{D^p(v)}{p!}$$

Soit encore :

$$w_p = \left| J_p \cdot \frac{\partial^p n(\sigma\eta)}{\partial \eta^p} \right| = \left| J_p \cdot \sigma^p \frac{\partial^p n(\sigma\eta)}{\partial (\sigma\eta)^p} \right| < \alpha_p$$

où :

$$\alpha_p = \sigma^p \frac{D^p(v)}{p!} \cdot \left| \frac{\partial^p n(\sigma\eta)}{\partial (\sigma\eta)^p} \right|.$$

En utilisant la formule de Stirling

$$p! \simeq p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p}$$

nous pouvons écrire :

$$\text{Log}(\alpha_p) = -p \text{Log} \left(\frac{p}{e \sigma^D(v)} \right) - \frac{1}{2} \text{Log}(p) + (\text{un terme fini})$$

puisque $\frac{\partial^p n(\sigma\eta)}{\partial (\sigma\eta)^p}$ est fini par hypothèse.

Lorsque p tend vers l'infini

$$\text{Log}(\alpha_p) \rightarrow -\infty$$

donc α_p et w_p tendent vers 0 comme $\left(\frac{e \sigma^D(v)}{p} \right)^p$.

Nous pouvons en déduire que $\sum_{p=0}^m w_p$ converge puisque w_p tend vers 0

et que $\frac{w_{p+1}}{w_p} = \frac{p^p e \sigma^D(v)}{(p+1)^{p+1}} \simeq \frac{1}{p}$ tend lui aussi vers 0 comme $\frac{1}{p}$.

Pour la deuxième fonction et puisque $\xi \gg N \gg v$ nous pouvons identifier

$$\sqrt{|v^2 + \xi^2 - 2 v \xi \cos \hat{\theta}|} = \sqrt{|v^2 - 1|} \text{ à } \sqrt{\xi^2} = \xi$$

et écrire

$$F_p \approx \frac{1}{p!} \int_N^\infty \xi^{p+1} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi < \frac{1}{p!} 2^{\frac{p+3}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

($\Gamma(x)$ est la fonction eulérienne de première espèce)

et par un raisonnement analogue au terme en J_p on peut montrer que :

$$\sum_{p=0}^{\infty} F_p \frac{\partial^p n(\sigma \eta)}{\partial \eta^p} \text{ a un sens.}$$

D'où :

$$\sum_{p=0}^{\infty} I_{p,i} \cdot \frac{\partial^p n(\sigma \eta)}{\sigma^p \partial \eta^p}$$

converge lorsque n tend vers l'infini.

3/ Calcul de $I_{1,i}$ et $I_{2,i}$

Le calcul de $I_{1,i}$ nous donne :

$$I_{1,i} = J_i(\omega, \sigma) - \sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|} \quad (11)$$

et pour $I_{2,i}$

$$I_{2,i} = \omega^2 + \frac{\sigma^2}{2} - \sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|} \cdot J_i(\omega, \sigma) \quad (12)$$

où :

$$J_i(\omega, \sigma) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{|\omega^2 + r^2 - 2 r \omega \cos \hat{\theta}|}}{2 \pi \sigma^2} r e^{-\frac{r^2}{2 \sigma^2}} dr d\hat{\theta} \quad (13)$$

(l'indice i se réfère à une distance de mesure x_i), soit encore :

$$J(\omega, \sigma) = \frac{4 \omega}{\pi} F(A) \quad (14)$$

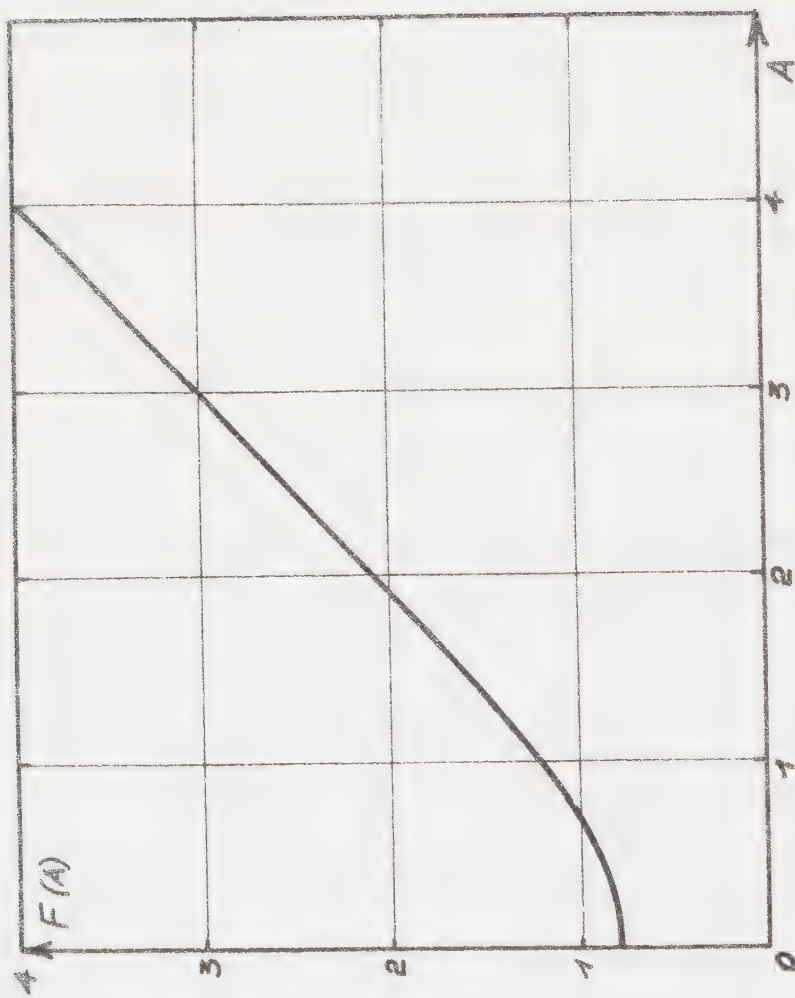


FIGURE 4 - Quantité $F(A)$ définie à l'équation (15) en fonction de la variable A

où :

$$F(A) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{1 + 2\rho^2 A^2 - 2\sqrt{2} A \rho \cos \hat{\theta}} \rho e^{-\rho^2} d\hat{\theta} d\rho \quad (15)$$

où nous avons posé $A = \frac{\sigma}{\omega}$ et $\rho = \frac{r}{\sigma\sqrt{2}}$

$F(A)$ est calculé numériquement - courbe représentative (Figure 4)

§ V - Formules obtenues en se limitant au premier ordre

En se limitant au terme du premier ordre et d'après les formules (11) (12)

(8) nous avons :

$$n_i(\omega) = n(\sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|}) + (J_i(\omega, \sigma) - \sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|}) \frac{\partial n(\sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|})}{\partial(\sqrt{|\omega^2 - \sigma^2|})} \quad (16)$$

soit avec : $u^2 = \omega^2 - \sigma^2$ "ouverture initiale carrée"

$$n_i(\sqrt{u^2 + \sigma^2}) = n(u) + (J_i(\sqrt{u^2 + \sigma^2}, \sigma) - u) \frac{\partial n(u)}{\partial u} \quad (17)$$

D'après (4) et (2) :

$$\sigma^2 = \frac{1}{1^3 \sqrt[3]{k^2}} \frac{a^2 + (1-a)^2}{a^2(1-a)^2} \left\{ e^{2lx} - 2x^2 l^2 - 2lx - 1 \right\} \quad (18)$$

Pour avoir dans l'équation (17) comme seules inconnues $n(u)$ et $\frac{\partial n(u)}{\partial u}$,

les $n_i(\sqrt{u^2 + \sigma^2})$ étant déterminés expérimentalement, il faut que σ soit une fonction connue de u (donc k sera fonction de u). Or, k n'est pas une fonction biunivoque de u : nous connaissons seulement la section efficace différentielle d'obtention

de u pour k et $a = \frac{E_+}{k}$ fixés ; la formule (41) du Ch. I donne en effet la section

efficace différentielle : $\frac{d\sigma(\mathcal{H}, k, a)}{d\mathcal{H} da}$ où $\mathcal{H}$ est le rapport de $\hat{u}$ à un angle $\hat{\omega}_0$

défini par $\hat{\omega}_0 = \frac{m_0}{ka(1-a)}$.

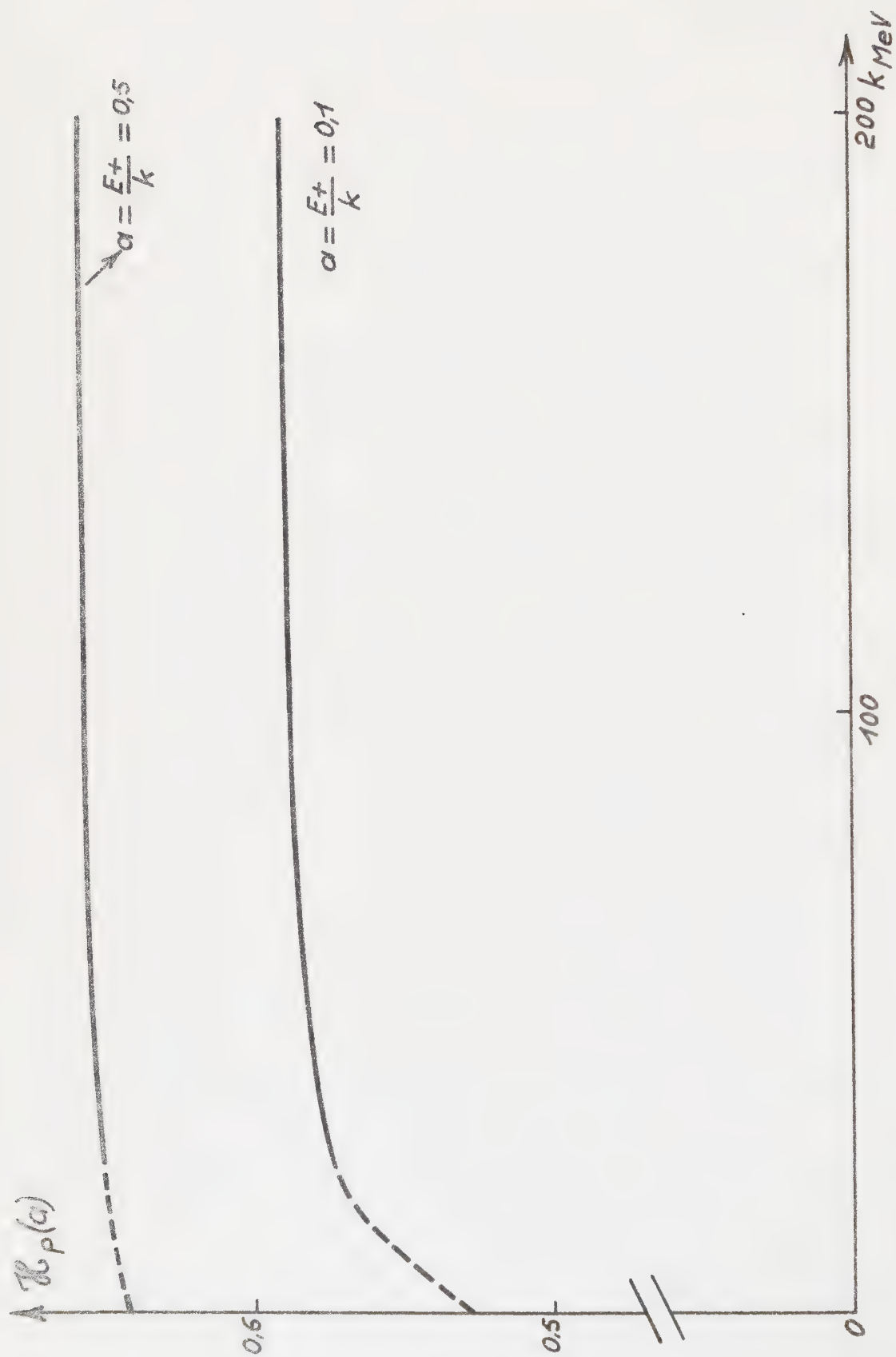


FIGURE 5 - Quantité $X_p(a)$ en fonction de k pour $a = 0,1$ et $a = 0,5$ calculée dans l'émission nucléaire

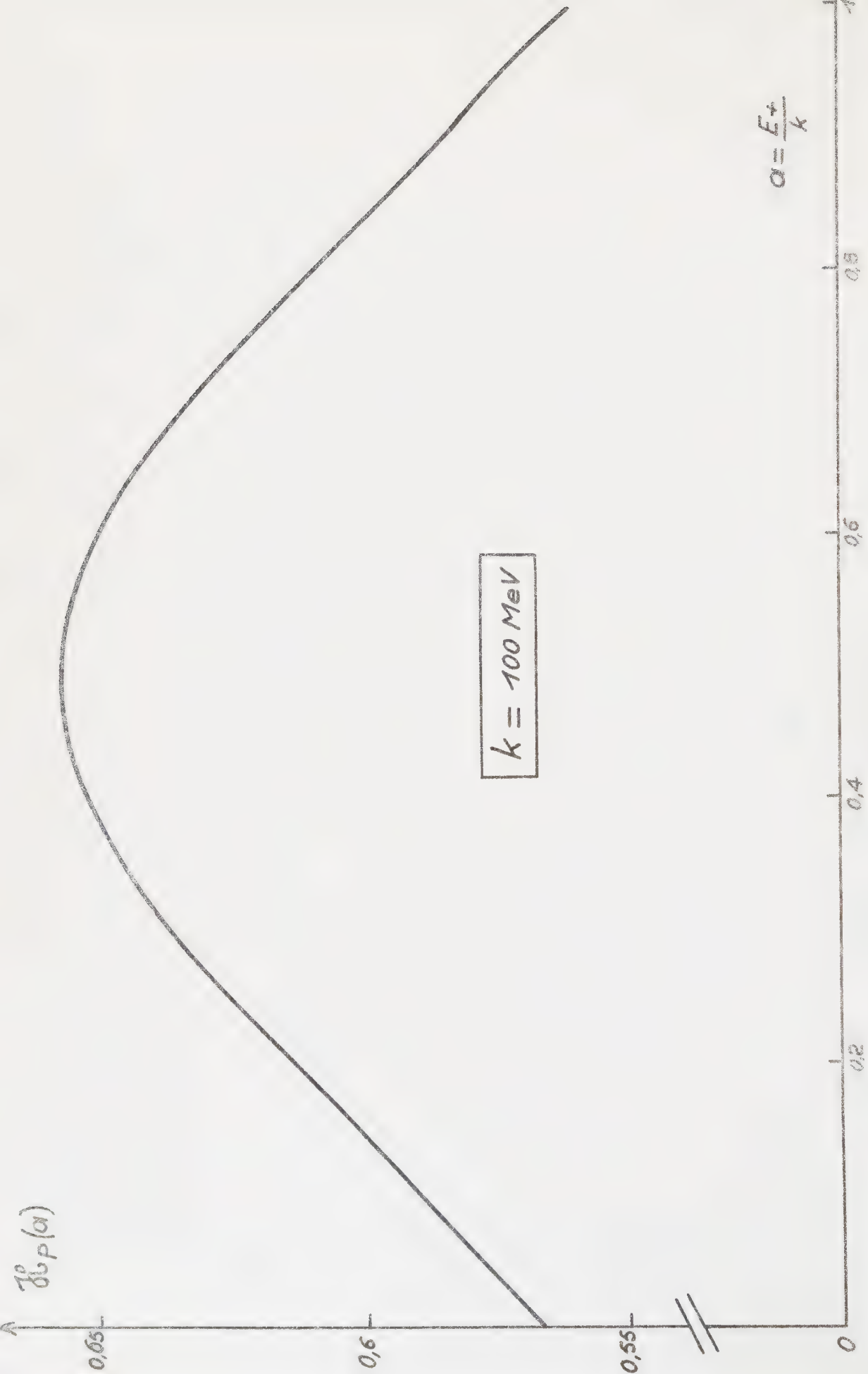


FIGURE 5 $\mathcal{H}_p(a)$ en fonction de a pour $k = 100$ MeV calculé dans l'émission nucléaire

$$\mathcal{H} = \frac{\hat{u}}{\hat{\omega}_0} = \frac{u \, k \, a (1 - a)}{x \cdot n_0} \quad (19)$$

Nous pouvons calculer $\mathcal{H}_p(a)$, fonction donnant la valeur la plus probable de $\mathcal{H}$ pour a donné. $\mathcal{H}_p(a)$ peut être considéré comme indépendant de l'énergie k du photon (Figure 5 et 6). Nous ferons l'approximation suivante qui consiste à prendre pour u la valeur correspondant à la valeur la plus probable $\mathcal{H}_p(a)$ pour a donné, ou ce qui revient au même nous remplacerons la distribution de $\mathcal{H}$ à k et à a donnés par une fonction de Dirac $\delta(\mathcal{H} - \mathcal{H}_p(a))$. Ceci est possible pour trois raisons :

1. La distribution de $\mathcal{H}$ est relativement aiguë autour de $\mathcal{H}_p(a)$ et suffisamment symétrique ;
2. Les fonctions $n(u)$ et $\frac{\partial n(u)}{\partial u}$ sont lentement variables de u ;
3. Cette hypothèse simplificatrice n'intervient que dans un calcul de correction

Nous avons donc :

$$\mathcal{O}^2 = B^2(a, x) u^2 = B^2 u^2 \quad (20)$$

avec :

$$B^2(a, x) = \frac{1}{x^2 l^3 K^2} \cdot \frac{a^2 + (1 - a)^2}{m_0^2 \mathcal{H}_p^2(a)} \cdot \left\{ c^2 l x - 2 x^2 l^2 - 2 l x - 1 \right\} \quad (20 \text{ bis})$$

et (17) se transforme en :

$$n_i(u \sqrt{1 + B^2}) = n(u) + \left[J_i(u \sqrt{1 + B^2}, uB) - u \right] \cdot \frac{\partial n(u)}{\partial u} \quad (17 \text{ bis})$$

et en revenant à l'ouverture angulaire initiale : $\hat{u} = \frac{u}{x_i}$, nous avons :

$$n_i(\hat{u} \sqrt{1 + B^2}) = n(\hat{u}) + \left[J_i(\hat{u} \sqrt{1 + B^2}, \hat{u}B) - \hat{u} \right] \cdot \frac{\partial n(\hat{u})}{\partial \hat{u}} \quad (17 \text{ ter})$$

§ VI - Intégration sur a

Nous avons effectué tous nos calculs en supposant au début du § II une divergence énergétique $a = \frac{E_+}{k}$ donnée. Il nous faut maintenant intégrer (17 bis) sur toutes les divergences. Supposons encore une fois que $\hat{u}$ est lié de manière biunivoque à l'énergie de la paire, équation (19)

$$\hat{u} = \frac{m_0 \mathcal{K}_p(a)}{k a(1-a)}$$

Soit $\phi(a, k)$ la fonction de distribution de la divergence énergétique $a = \frac{E_+}{k}$ pour une énergie donnée de photons k . Cette fonction est proportionnelle à la section efficace différentielle en a de matérialisation (Formule 44_{PP} Ch I). La distribution est évidemment normalisée à l'unité. Nous pouvons écrire

$\phi(a, k) = f(a, \hat{u})$ puisque (19) lie de manière biunivoque $\hat{u}$ et k . Cette approximation introduit une erreur d'autant plus faible que $\phi(a, k)$ est très lentement variable avec k .

L'équation (17 ter), en tenant compte de la probabilité différentielle d'apparition de a pour $\hat{u}$ donné, s'écrit :

$$n_i(\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}) f(a, \hat{u}) da = n(\hat{u}) f(a, \hat{u}) da + \left[J_i(\hat{u} \sqrt{1+B^2}, \hat{u} B) - u \right] f(a, \hat{u}) \frac{\partial n(\hat{u})}{\partial \hat{u}} da$$

et en intégrant compte tenu de :

$$N(\hat{u}) = n(\hat{u}) = \int_0^1 n(\hat{u}) f(a, \hat{u}) da$$

$$\int_0^1 n_i(\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}) f(a, \hat{u}) da = N(\hat{u}) + \frac{\partial N(\hat{u})}{\partial \hat{u}} \left[\int_0^1 J_i(\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}, \hat{u} B(a)) f(a, \hat{u}) da \right] - \hat{u} \frac{\partial N(\hat{u})}{\partial \hat{u}}$$

Soit :

$$\boxed{\mathcal{N}_i(\hat{u}) = N(\hat{u}) + \int_{1i}(\hat{u}) \cdot \frac{\partial N(\hat{u})}{\partial \hat{u}}} \quad (21)$$

avec :

$$\mathcal{N}_i(\hat{u}) = \int_0^1 n_i(\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}) \cdot f(a, \hat{u}) da$$

et :

$$\int_{1i}(\hat{u}) = -\hat{u} + \int_0^1 J_i\left[\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}, \hat{u}B(a)\right] \cdot f(a, \hat{u}) da$$

Nous connaissons expérimentalement $N_i(\hat{\omega})$ où $\hat{\omega} = \hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}$ qui est l'intégrale de $n_i(\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}) f(a, \hat{u})$ pour $\hat{\omega} = \hat{u} \sqrt{1+B^2(a)} = \text{constante}$.

Donc : $d\hat{\omega} = d\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}$

et
$$N_i(\hat{\omega}) = \int_0^1 n_i(\hat{\omega}) f\left(a, \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{1+B^2(a)}}\right) \cdot \sqrt{1+B^2(a)} da$$

$$N_i(\hat{\omega}) = n_i(\hat{\omega}) \int_0^1 f\left(a, \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{1+B^2(a)}}\right) \cdot \sqrt{1+B^2(a)} da$$

et
$$\boxed{\mathcal{N}_i(\hat{u}) = \int_0^1 \frac{N_i(\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}) \cdot f(a, \hat{u})}{\int_0^1 f\left(\xi, \frac{\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}}{\sqrt{1+B^2(\xi)}}\right) \cdot \sqrt{1+B^2(\xi)} d\xi} da} \quad (22)$$

L'équation (21) est l'équation fondamentale de notre analyse expérimentale.

§ VII - Résultats - Spectre d'ouverture angulaire initiale

Connaissant $\phi(a, k)$, donc $f(a, \hat{u})$, $B(a)$, $N_i(\hat{\omega})$, nous pouvons calculer $\mathcal{N}_i(\hat{u})$ et $J_{1i}(\hat{u})$.

Nous avons :

$$\mathcal{N}_i(\hat{u}) = N(\hat{u}) + J_{1i}(\hat{u}) \cdot \frac{\partial N(\hat{u})}{\partial \hat{u}}$$

ce qui nous donne, si nous avons fait nos mesures à deux distances x_1 et x_2 ,

les deux équations :

$$\mathcal{N}_1(\hat{u}) = N(\hat{u}) + J_{11}(\hat{u}) \cdot \frac{\partial N(\hat{u})}{\partial \hat{u}}$$

$$\mathcal{N}_2(\hat{u}) = N(\hat{u}) + J_{12}(\hat{u}) \cdot \frac{\partial N(\hat{u})}{\partial \hat{u}}$$

où seules $N(\hat{u})$ et $\frac{\partial N(\hat{u})}{\partial \hat{u}}$ sont des inconnues ; d'où :

$$N(\hat{u}) = \frac{\mathcal{N}_1(\hat{u}) \cdot J_{12}(\hat{u}) - \mathcal{N}_2(\hat{u}) \cdot J_{11}(\hat{u})}{J_{12}(\hat{u}) - J_{11}(\hat{u})} \quad (23)$$

qui nous permet d'obtenir $N(\hat{u})$ comme nous nous l'étions proposés, nous verrons au Chapitre suivant l'utilisation faite de ce résultat.

Références Bibliographiques

1. G. BARONI, A. BORSELLINO, L. SCARSI, G. VANDERHAEGHE : Nuovo Cimento 12, 1653 (1953)
2. M. AVAN : Thèse, Faculté des Sciences, Université de Caen (1956)

CHAPITRE VII

CALCUL DU SPECTRE D'OUVERTURE ANGULAIRE
A L'AIDE DES FORMULES PRECEDEMMENT ETABLIES

§ I - Données expérimentales

L'ensemble de nos résultats expérimentaux est consigné dans les deux histogrammes $N_1(\hat{\omega})$ et $N_2(\hat{\omega})$ (Figure 3-4, Ch. V) portant sur 15.460 paires de matérialisation. Rappelons que nous avons porté en abscisse une "énergie équivalente" : $\hat{\omega}_{\text{MeV}}$ liée à $\hat{\omega}_{\text{radians}}$ par la relation

$$\hat{\omega}_{\text{MeV}} = \frac{4 m_0}{\hat{\omega}_{\text{radians}}} \quad (1)$$

Remarquons que lorsque nous passons de $N_1(\hat{\omega}_{\text{MeV}})$ à $N_2(\hat{\omega}_{\text{MeV}})$ nous effectuons un déplacement des spectres vers les basses énergies (ou les grands angles). Ce déplacement s'explique de la manière suivante : la contribution de la diffusion coulombienne multiple étant plus importante dans la 2ème mesure (distance $x_2 > x_1$) que dans la première, l'angle sera donc en moyenne plus ouvert, donc l'énergie équivalente plus faible. Il faut rapprocher cette constatation du choix de la quantité Ω précédemment définie au Chapitre précédent.

Les courbes 5 du Ch. (V) représentent les cotes moyennes x_1 et x_2 de mesure en fonction de $\hat{\omega}_{\text{MeV}}$. L'erreur relative sur l'angle $\hat{\omega}$ d'une paire est

nous l'avons montré au Ch. (V) inférieure à 10 % et celle sur les côtes de l'ordre de 2 %.

§ II - Calcul de $N_1(u)$ et $N_2(u)$

Nous avons vu que l'équation (22) du Chapitre précédent

$$N_1(u) = \int_0^1 \frac{N_1(u) \sqrt{1+B^2(a)} f(a, u)}{\int_0^1 f(\xi, u) \frac{\sqrt{1+B^2(a)}}{\sqrt{1+B^2(\xi)}} \sqrt{1+B^2(\xi)} d\xi} du \quad (2)$$

nous permet de calculer $N_1(u)$ et $N_2(u)$ à partir des données expérimentales.

$B^2(a)$ est donné par l'expression (20 bis) Ch. (VI). Nous avons ici $2 \text{ lx} \ll 1$.

Nous remplaçons $\mathcal{H}_p(a)$ par l'expression numérique donnée au Ch. (I) (55) : celle-ci est valable avec une bonne précision dans le domaine d'énergie qui nous intéresse. La Figure 5 Ch. (VI) montre la variation de $\mathcal{H}_p(a)$, fonction de l'énergie K pour les deux valeurs de a : 0,1 et 0,5. $\mathcal{H}_p(a)$ peut être considéré comme constant à moins de 3 % près lorsque l'énergie k varie en restant supérieure à 10 MeV.

En prenant ici pour valeur de la constante K de diffusion coulombienne multiple intervenant dans $\mathcal{H}$ (équation (3), Ch. V), celle donnée par Voyvodic et Pickup (Equation 22 Ch. II) calculée pour une longueur de cellule de 150μ , nous obtenons pour $B^2(a)$:

$$B^2(a) = 4,27 \cdot 10^{-2} \cdot x \cdot \left\{ \frac{a^2 + (1-a)^2}{[0,689 - 0,242 \sqrt{0,265 - a(1-a)}]^2} \right\} \quad (3)$$

La distribution $f(a, \hat{u}) = \phi(a, k)$ des a pour $\hat{u}$ ou k constant est celle obtenue en normalisant à l'unité la section efficace différentielle en k (équation (44), Ch. I) de production de paires.

$$f(a, \hat{u}) = \phi(a, k) = \frac{d\mathcal{O}(a, k)}{da} \cdot \frac{1}{\int_0^1 \frac{d\mathcal{O}(a, k)}{da} da} \quad (4)$$

Les calculs numériques sont réalisés sur Ordinateur IBM 1620 (Laboratoire de Physique Nucléaire, Faculté des Sciences de Clermont).

Les fonctions que nous employons étant toujours lentement variables nous effectuons les intégrations numériques par la méthode des trapèzes.

1. Forme simplifiée de l'équation (2) donnant $\mathcal{N}_1^{\mathcal{O}}(\hat{u})$

Appelons $Y(a, \hat{u})$ la quantité définie par :

$$Y(a, \hat{u}) = \int_0^1 f\left(\xi, \frac{\hat{u} \sqrt{1 + B^2(a)}}{\sqrt{1 + B^2(\xi)}}\right) \sqrt{1 + B^2(\xi)} \cdot d\xi \quad (5)$$

Comme nous l'avons remarqué à la fin du Ch. I les quantités déduites de la section efficace différentielle en $\mathcal{H}(a)$ donnée par Olsen (équation 41 Ch. I) sont symétriques par rapport à $a = \frac{1}{2}$, en particulier $\mathcal{H}_p(a)$ et donc $B^2(a)$. $B^2(a)$ est de plus monotone dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$. La quantité $\sqrt{1 + B^2(a)}$ possède elle aussi ces deux propriétés. La fonction de distribution $f(a, \hat{u})$ est une fonction pratiquement uniforme et, est très lentement variable en $\hat{u}$ (Figure 3 Ch.III). Nous pouvons appliquer alors le théorème de la moyenne et prendre pour résultat de l'intégration donnant $Y(a, \hat{u})$ la quantité :

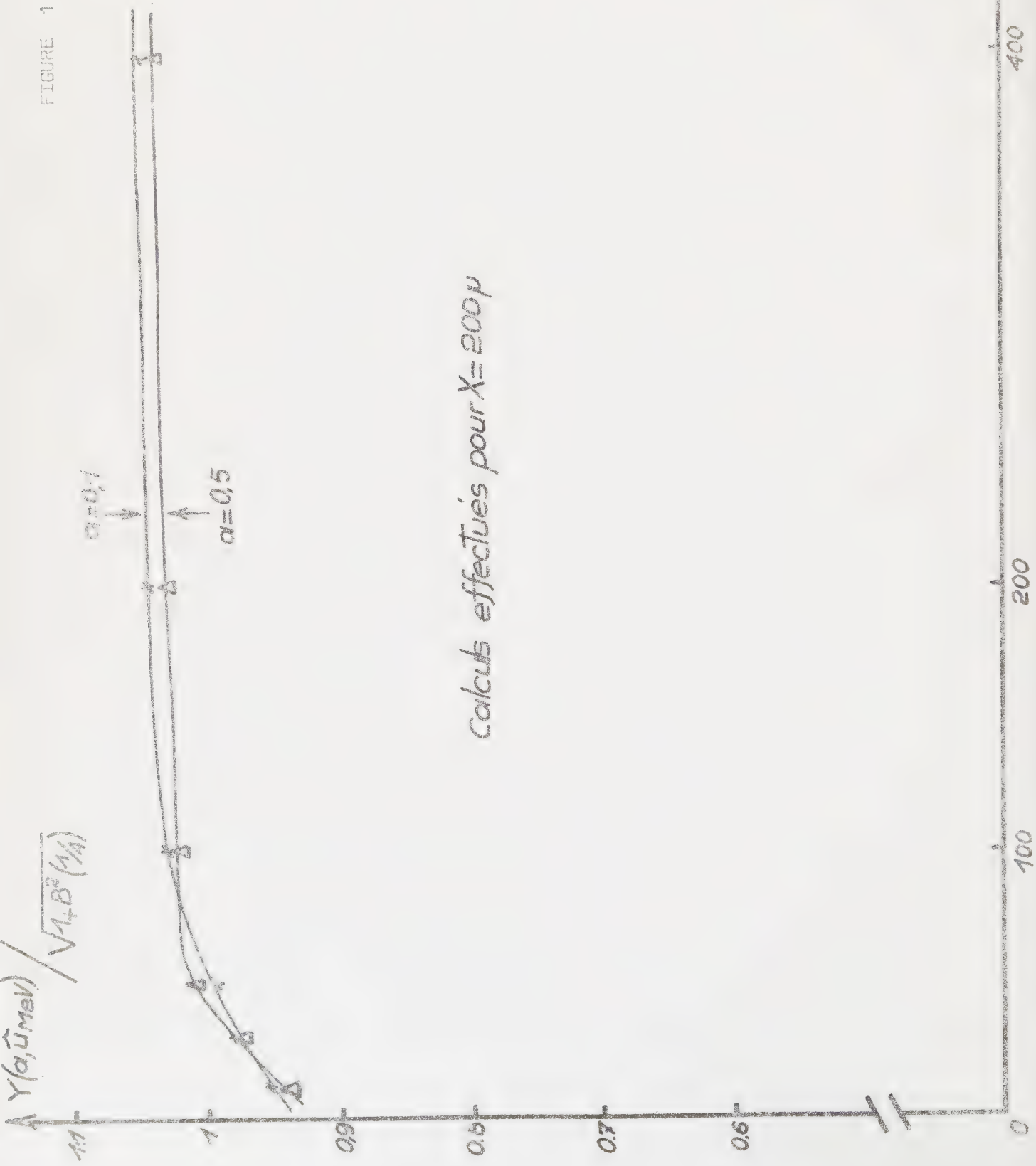
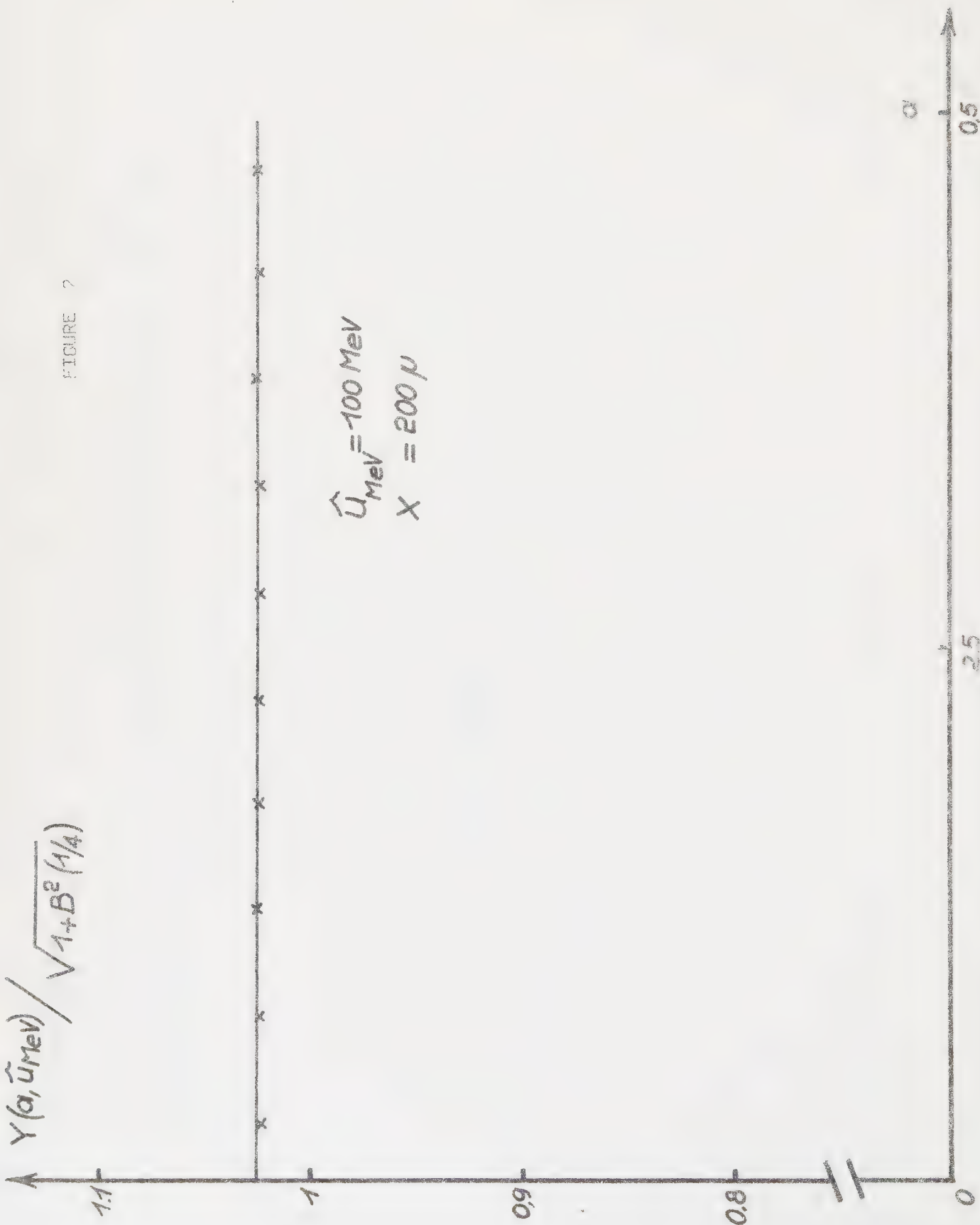


FIGURE 7



$$f(a, \frac{\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}}{\sqrt{1+B^2(\eta)}}) \cdot \sqrt{1+B^2(\eta)} \quad (6)$$

où η est une valeur comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$. Nous prenons dans nos calculs comme valeur approchée $\eta = \frac{1}{4}$; nous étudions ensuite la variation du rapport $Y(a, \hat{u}) / \sqrt{1+B^2(1/4)}$. La Figure 1 représente la variation de ce rapport en fonction de $\hat{u}_{\text{MeV}}$ exprimé en "MeV équivalent" pour les valeurs de a comprises entre 0,1 et 0,5. La distance x est prise égale à 200 μ . Nous voyons que l'erreur faite si nous assimilons $Y(a, \hat{u}) / \sqrt{1+B^2(1/4)}$ à l'unité est inférieure à 3 %. La Figure 2 représente la variation du rapport en fonction de a pour $\hat{u}$ exprimé en énergie, égale à 100 MeV. Le rapport est pratiquement constant quel que soit a . Nous remplaçons donc par la suite $Y(a, \hat{u})$ par $\sqrt{1+B^2(1/4)}$.

Nous pouvons donc écrire l'équation (2) sous la forme simplifiée :

$$\mathcal{N}_i(\hat{u}) = \int_0^1 \frac{N_i(\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}) \cdot f(a, \hat{u})}{\sqrt{1+B^2(1/4)}} da \quad (7)$$

2. Conduite des calculs

L'équation (7) peut être écrite :

$$\mathcal{N}_i(\hat{u}) = \int_0^1 N_i(\hat{u} \sqrt{1+B^2(a)}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+B^2(a)}} \cdot f(a, \hat{u}) \cdot \frac{\sqrt{1+B^2(a)}}{\sqrt{1+B^2(1/4)}} da \quad (8)$$

si nous exprimons $\hat{u}$ et $\hat{\omega}$ en énergie équivalente (Formule 1), à savoir :

$$\hat{u}_{\text{MeV}} = \frac{4 m_0}{\hat{u}_{\text{radians}}} \quad (9)$$

$$\hat{\omega}_{\text{MeV}} = \frac{4 m_0}{\hat{\omega}_{\text{radians}}} \quad (10)$$

nous obtenons :

$$N_i(\hat{u}_{\text{MeV}}) = \int_0^1 N_i\left(\frac{\hat{u}_{\text{MeV}}}{\sqrt{1+B^2(a)}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+B^2(a)}} \cdot f(a, \hat{u}_{\text{MeV}}) \cdot \frac{\sqrt{1+B^2(a)}}{\sqrt{1+B^2(1/4)}} da \quad (11)$$

En fait $\hat{u}_{\text{MeV}}$ et $\hat{\omega}_{\text{MeV}}$ sont liés par la relation :

$$\hat{\omega}_{\text{MeV}} = \frac{\hat{u}_{\text{MeV}}}{\sqrt{1+B^2(a)}} \quad (12)$$

d'où :

$$\Delta \hat{\omega}_{\text{MeV}} = \frac{\Delta \hat{u}_{\text{MeV}}}{\sqrt{1+B^2(a)}} \quad (13)$$

entre les bandes d'énergies $\Delta \hat{u}_{\text{MeV}}$ et $\Delta \hat{\omega}_{\text{MeV}}$ utilisées pour le tracé des histogrammes. Nous pouvons donc écrire :

$$N_i(\hat{u}_{\text{MeV}}) \Delta \hat{u}_{\text{MeV}} = \int_0^1 N_i\left(\frac{\hat{u}_{\text{MeV}}}{\sqrt{1+B^2(a)}}\right) \cdot \frac{\hat{u}_{\text{MeV}}}{\sqrt{1+B^2(a)}} \cdot f(a, \hat{u}_{\text{MeV}}) \cdot \frac{\sqrt{1+B^2(a)}}{\sqrt{1+B^2(1/4)}} da \quad (14)$$

soit encore :

$$N_i(\hat{u}_{\text{MeV}}) \Delta \hat{u}_{\text{MeV}} = \int_0^1 \left\{ N_i(\hat{\omega}_{\text{MeV}}) \Delta \hat{\omega}_{\text{MeV}} \right\} \cdot f(a, \hat{u}_{\text{MeV}}) \cdot \frac{\sqrt{1+B^2(a)}}{\sqrt{1+B^2(1/4)}} da \quad (15)$$

C'est avec cette dernière formule que nous travaillons sur Ordinateur

IBM 1620. L'équation (15) signifie que le nombre de paires $N(\hat{\omega}_{\text{MeV}}) \Delta \hat{\omega}_{\text{MeV}}$ dont

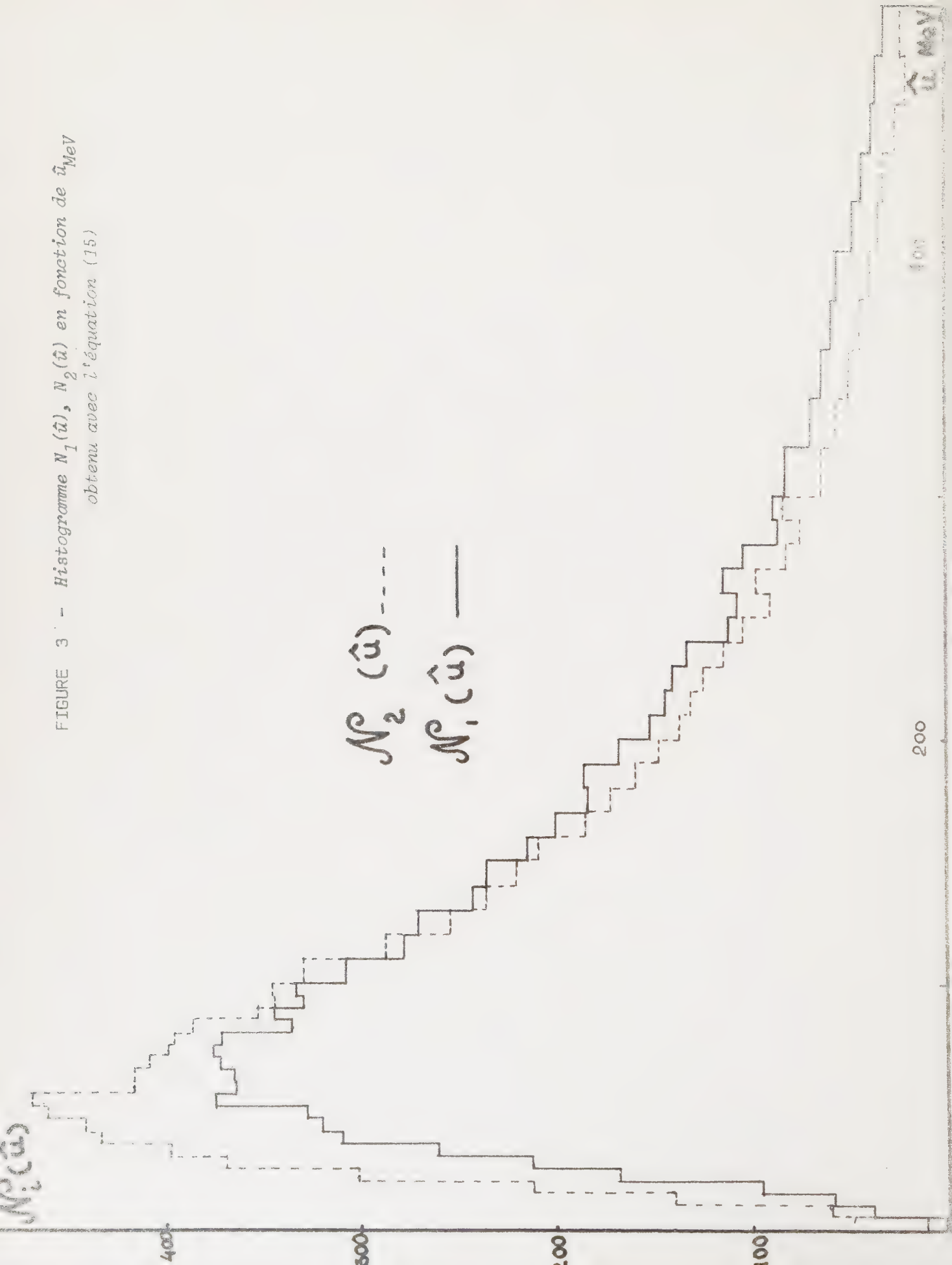
l'angle a été trouvé entre $\hat{\omega}_{\text{MeV}} - \frac{\Delta \hat{\omega}_{\text{MeV}}}{2}$ et $\hat{\omega}_{\text{MeV}} + \frac{\Delta \hat{\omega}_{\text{MeV}}}{2}$ est distribué

dans des intervalles définis par $\hat{u}_{\text{MeV}}$ et $\Delta \hat{u}_{\text{MeV}}$. L'angle $\hat{u}_{\text{MeV}}$ et la bande

$\Delta \hat{u}_{\text{MeV}}$ est déterminé par la connaissance de $\hat{\omega}_{\text{MeV}}$, $\Delta \hat{\omega}_{\text{MeV}}$ et de a. Cette

distribution est représentée par la fonction :

FIGURE 3 - Histogramme $N_1(\hat{u})$, $N_2(\hat{u})$ en fonction de $\hat{u}_{MeV}$
 obtenu avec l'équation (15)



$$f(a, \hat{u}_{\text{MeV}}) \cdot \frac{\sqrt{1 + B^2(a)}}{\sqrt{1 + B^2(1/4)}} \quad (16)$$

Nous calculons aussi les quantités $J_{11}(\hat{u})$ et $J_{12}(\hat{u})$ définies au Ch. (VI) et données par :

$$J_{1,i}(\hat{u}) = -\hat{u} + \int_0^1 \mathcal{J}(\hat{u} \sqrt{1 + B^2(a)}, \hat{u}B(a)) f(a, \hat{u}) da \quad (17)$$

Puis finalement nous résolvons le système des deux équations aux deux inconnues :

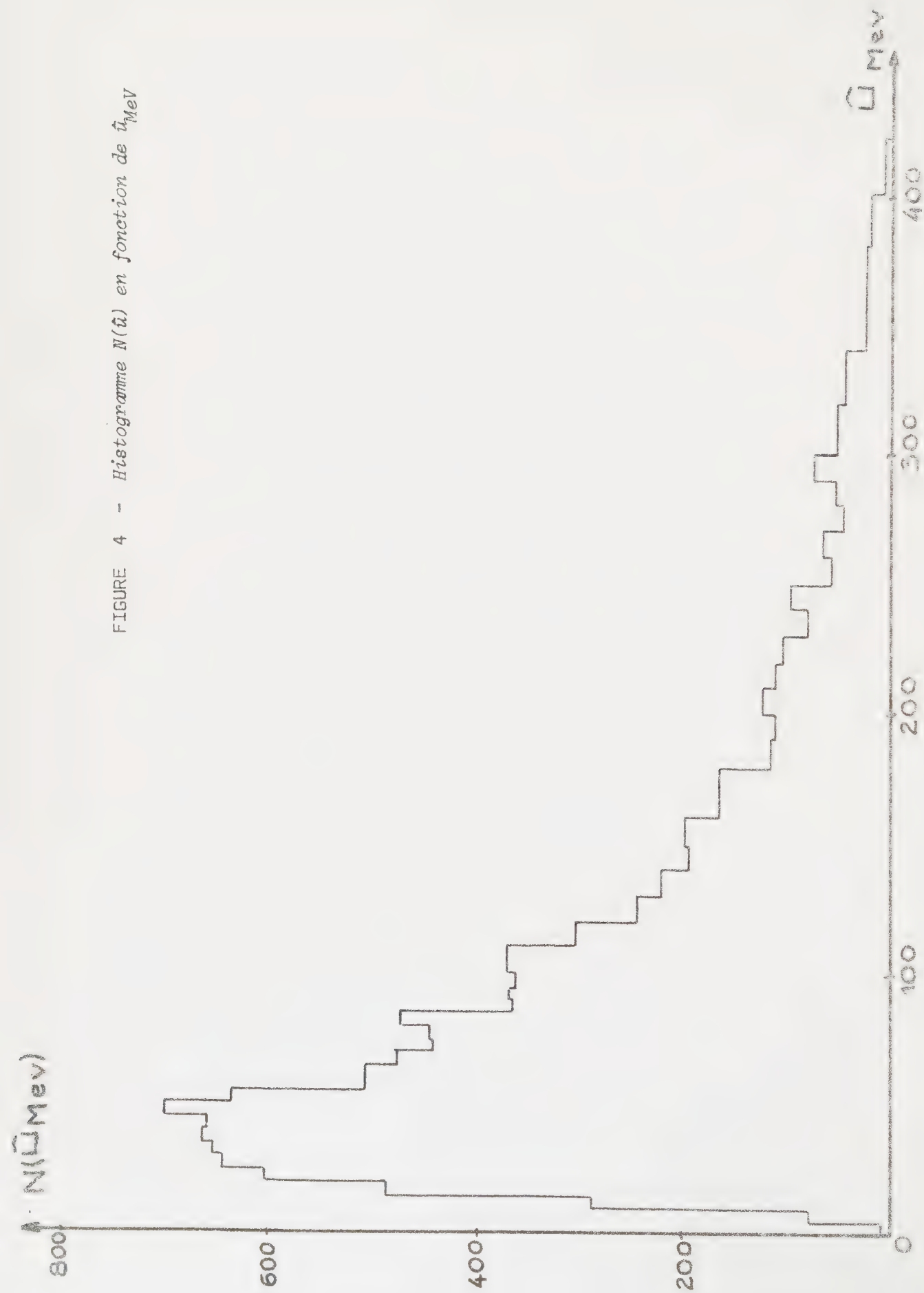
$N(\hat{u})$ et $\frac{\partial N(\hat{u})}{\partial \hat{u}}$ qui nous permet d'obtenir l'histogramme des ouvertures angulaires initiales.

§ III - Conclusion

Nous obtenons (Figure 3) selon la méthode décrite ci-dessus les deux histogrammes $N_1^{\mathcal{P}}(\hat{u})$ et $N_2^{\mathcal{P}}(\hat{u})$. A ce stade du calcul les considérations suivantes situent le problème physique :

- le passage de $N_i(\hat{\omega}_{\text{MeV}})$ à $N_i^{\mathcal{P}}(\hat{u}_{\text{MeV}})$ qui se traduit par un déplacement vers les grandes énergies (petits angles) de l'ensemble des histogrammes est dû à la correction de diffusion coulombienne multiple obtenue par remplacement de la valeur mesurée ω par $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \varpi^2}$. Cette substitution (p.83 Ch.VI) correspond à la correction effectuée par les auteurs précédemment cités⁽¹⁾. Cette correction importante est cependant insuffisante puisque les spectres obtenus $N_2^{\mathcal{P}}(\hat{u}_{\text{MeV}})$ et $N_1^{\mathcal{P}}(\hat{u}_{\text{MeV}})$ ne sont pas identiques et dépendent encore de la distance de mesures représentée ici par l'indice 1 ou 2 ($x_1 < x_2$). En effet, la quantité $N_2^{\mathcal{P}}(\hat{u}_{\text{MeV}}) - N_1^{\mathcal{P}}(\hat{u}_{\text{MeV}})$ positive vers les hautes énergies (angles $\hat{u}$ petits) et négative vers les basses

FIGURE 4 - Histogramme $N(\hat{u})$ en fonction de $\hat{u}_{MeV}$



énergies n'est pas négligeable. Cette différence s'explique aisément si nous nous rappelons que :

a) $N_2(\hat{u}_{\text{MeV}})$ est obtenu à partir des mesures effectuées sur les plus grandes distances ($x_2 \simeq 2 x_1$) et subit donc un apport $\mathcal{O}$ dû à la diffusion collatérale multiple plus importante ($\mathcal{O}_2 \simeq \sqrt{2} \mathcal{O}_1$).

b) la correction effectuée à ce stade - remplacement de ω par $\Omega = \sqrt{|\omega^2 - \mathcal{O}^2|}$ consiste à prendre la valeur provisoire Ω de l'ouverture de la paire (Ch.VI). Or cette valeur provisoire de l'ouverture est plus faible que la valeur moyenne de l'ouverture. En effet :

$$\Omega = \sqrt{|\omega^2 - \mathcal{O}^2|} \leq \text{moyenne de } (\vec{u} = \vec{\omega} - \vec{\mathcal{O}}) \quad (16)$$

Le calcul suivant donnant $N(\hat{u}_{\text{MeV}})$ (Figure 4) tient compte de l'inégalité (17). L'emploi du développement limité autour de Ω supprime l'effet de cette trop grande correction. Remarquons simplement que l'histogramme $N(\hat{u}_{\text{MeV}})$ est non seulement situé à des énergies plus faibles que $N_2(\hat{u}_{\text{MeV}})$ mais aussi que $N_1(\hat{u}_{\text{MeV}})$.

Nous vérifions la cohérence des calculs précédents en constatant qu'après avoir introduit à l'"entrée" de la machine 15 460 paires nous en retrouvons à la "sortie" le même nombre à 2,3 % près, soit 15 825 paires. La différence provient des approximations faites dans les calculs (méthode des trapèzes, fonctions considérées comme constantes) des erreurs statistiques sur la fin des deux spectres $N_1(\hat{\omega}_{\text{MeV}})$ et $N_2(\hat{\omega}_{\text{MeV}})$ et enfin les termes en $\frac{\partial^2 N(\hat{u})}{\partial \hat{u}^2}$ et d'ordres supérieurs que nous avons négligé dans le développement limité.

En définitive l'histogramme $N(\hat{u}_{\text{MeV}})$ (Figure 4) représente le spectre des ouvertures angulaires initiales que nous avons obtenues lorsque nous transcrivons nos angles en énergie grâce à la correspondance donnée par la formule (1).

CHAPITRE VIII

COMPARAISON DES RESULTATS DES CALCULS ET DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

§ I - Evaluation de la charge nécessaire à l'irradiation

Nous allons préciser ici la manière dont nous avons évalué la quantité de charges électriques nécessaire à l'irradiation des émulsions. Le calcul est approché certaines grandeurs, notamment celle relative à l'ouverture angulaire du faisceau d'électrons sont difficilement accessibles, et peuvent varier avec les conditions d'emploi de l'accélérateur lorsque l'on utilise celui-ci pendant des temps courts (à l'ordre de la minute).

Nous nous sommes fixés un nombre n_p de $4 \cdot 10^4$ "photons par cm^2 " d'énergie comprise entre 145 et 155 MeV ($\Delta k = 10$ MeV), nécessaire à l'irradiation des émulsions nucléaires Ilford G 5 employées. Cette quantité a été déterminée par des irradiations préliminaires, destinées à déterminer la densité de paires de matérialisation qui optimise leur recherche et leur mesure. Nous avons la relation suivante :

$$n_p = \frac{Q}{e} \cdot \frac{1}{S} \cdot \frac{d(E_0, k)}{dk} \cdot \Delta k \cdot l_{Al} \cdot \rho \cdot \frac{N}{A} \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \quad (1)$$

entre n_p et Q , quantité de charge électrique cherchée.

Dans cette expression :

S : est la surface des émulsions à irradier ($S \simeq 1 \text{ cm}^2$)

l_{Al} : épaisseur de la cible d'aluminium ($l = 0,15 \text{ cm}$)

A : masse atomique de l'aluminium

ρ : densité volumique de l'aluminium

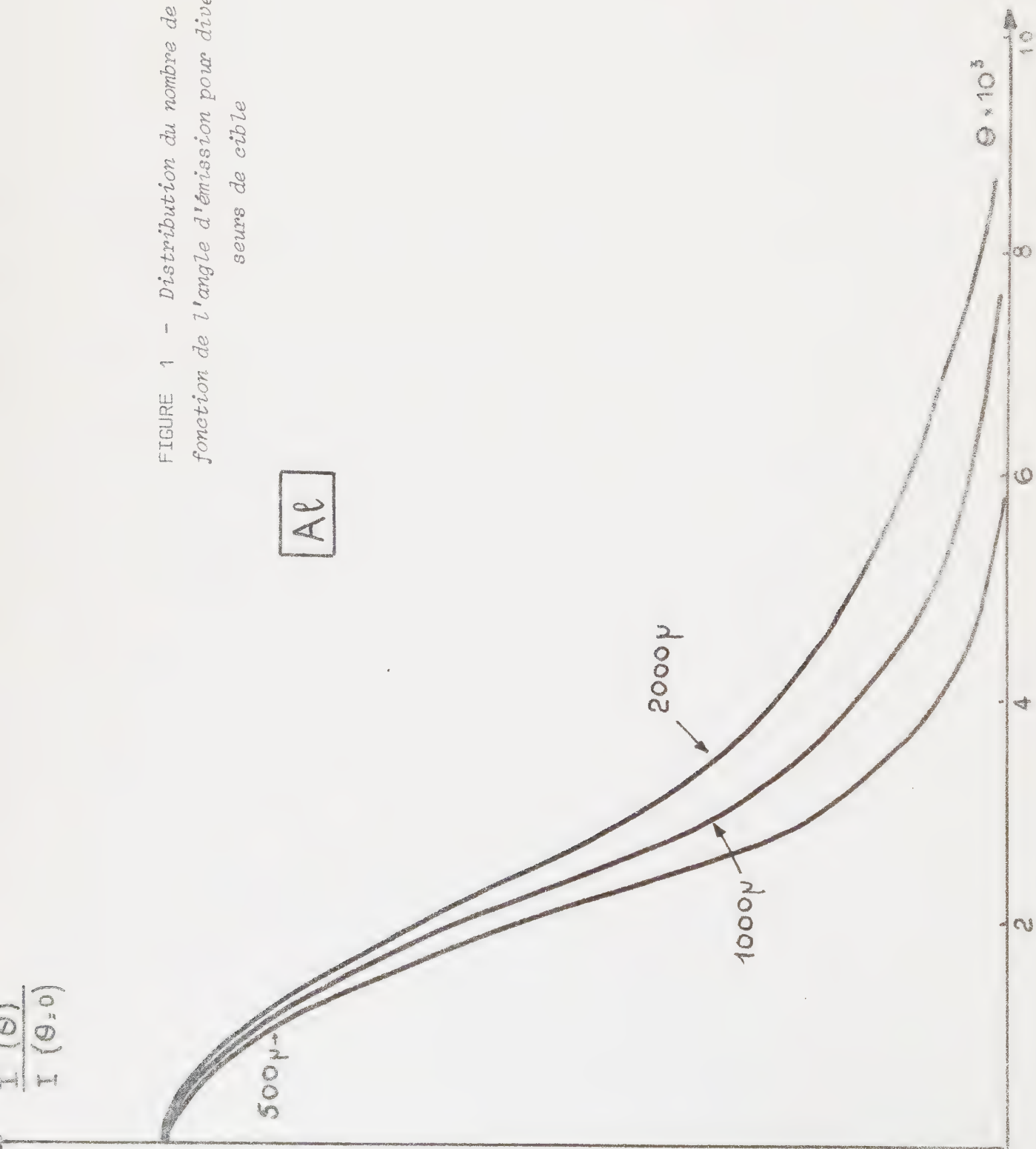


FIGURE 1 - Distribution du nombre de photons en fonction de l'angle d'émission pour diverses épaisseurs de cible

$\frac{d\sigma(E_0, k)}{dk}$: section efficace différentielle de rayonnement de freinage de photons d'énergie k par des électrons d'énergie $E_0 = 200$ MeV dans l'aluminium (Formule 44_{RF} Ch. I)

r_1 : rapport du nombre d'électrons du faisceau primaire qui contribue à l'irradiation au nombre total d'électrons frappant la cible ($r_1 \simeq 1,5 \%$, Ch. IV)

r_2 : rapport du nombre de photons produits dans la cible et accepté par le dispositif expérimental s'il n'y avait pas la colonne d'hydrure de lithium et si tous les électrons du faisceau contribuaient à l'irradiation, au nombre total de photons produits.

Nous avons calculé le rapport à l'aide des formules établies par Schiff⁽¹⁾

sur la distribution de l'ouverture angulaire Θ du rayonnement de freinage :

$$\frac{I(\theta)}{I(\theta=0)} = \frac{E_i\left(\frac{-\theta^2}{2\beta \frac{1}{A_1}}\right)}{\text{Log}\left(\frac{2\beta \frac{1}{A_1} E_0^2}{n_0^2}\right) - 0,5772} \quad (2)$$

ou

$$\beta = \left(\frac{9,2 \cdot Z \cdot e^2}{E_0}\right)^2 \cdot \frac{N_0 \rho}{A} \quad (3)$$

où $E_i()$ est l'exponentielle intégrale définie par :

$$E_i(-t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^{-u}}{-u} du \quad (4)$$

La Figure 1 représente cette distribution pour différentes épaisseurs de cible d'aluminium. Compte tenu de l'acceptance des collimateurs : $r_2 \simeq 0,44 \%$.

r_3 : rapport du nombre de photons de 150 MeV non absorbés dans la colonne d'hydrure de lithium, au nombre de photons de 150 MeV entrant dans la colonne.

Nous pouvons nous limiter à la correction d'absorption car à 150 MeV les corrections $N_p(k)$ et $N_c(k)$ sont peu importantes. Nous avons alors : $r_3 = 0,153$.

Avec les valeurs numériques précédentes l'équation (1) devient

$$n_p = Q \cdot 10^{13} \quad (5)$$

Si nous voulons avoir $n_p = 4 \cdot 10^4$ photons par cm^2 d'énergie comprise entre 145 et 155 MeV, il nous faut :

$$Q = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Coulomb} \quad (6)$$

Rappelons que l'irradiation a été effectuée en réalité avec une charge Q de $3,86 \cdot 10^{-9}$ Coulomb, qui devrait correspondre à un nombre de photons de $3,86 \cdot 10^4$ par cm^2 d'énergie comprise entre 145 et 155 MeV.

§ II - Comparaison des résultats

Nous pouvons maintenant comparer les résultats expérimentaux : à savoir le spectre d'ouverture angulaire initiale $N(\hat{u})$ avec les résultats des calculs de durcissement, $N_p(k)$. Dans ce but, à l'aide de la section efficace différentielle $\frac{d^2\sigma(\mathcal{K}, a)}{d\mathcal{K} da}$ établie par Olsen (Formule 41 Ch. I), nous pouvons calculer la distribution en angle $\hat{u}$, correspondant au spectre de photons $N_p(k)$:

$$N(\hat{u}) d\hat{u} = \int_0^{E_0} \int_0^1 \left\{ \frac{d^2\sigma(\mathcal{K}(\hat{u}, a, k), a)}{d\mathcal{K} da} \cdot \frac{d\mathcal{K}}{d\hat{u}} \cdot d\hat{u} \right\} N_p(k) dk da \quad (7)$$

$\frac{d\sigma(\hat{U} \text{ MeV} \cdot k)}{d\hat{U} \text{ MeV}}$ (unité arbitraire)

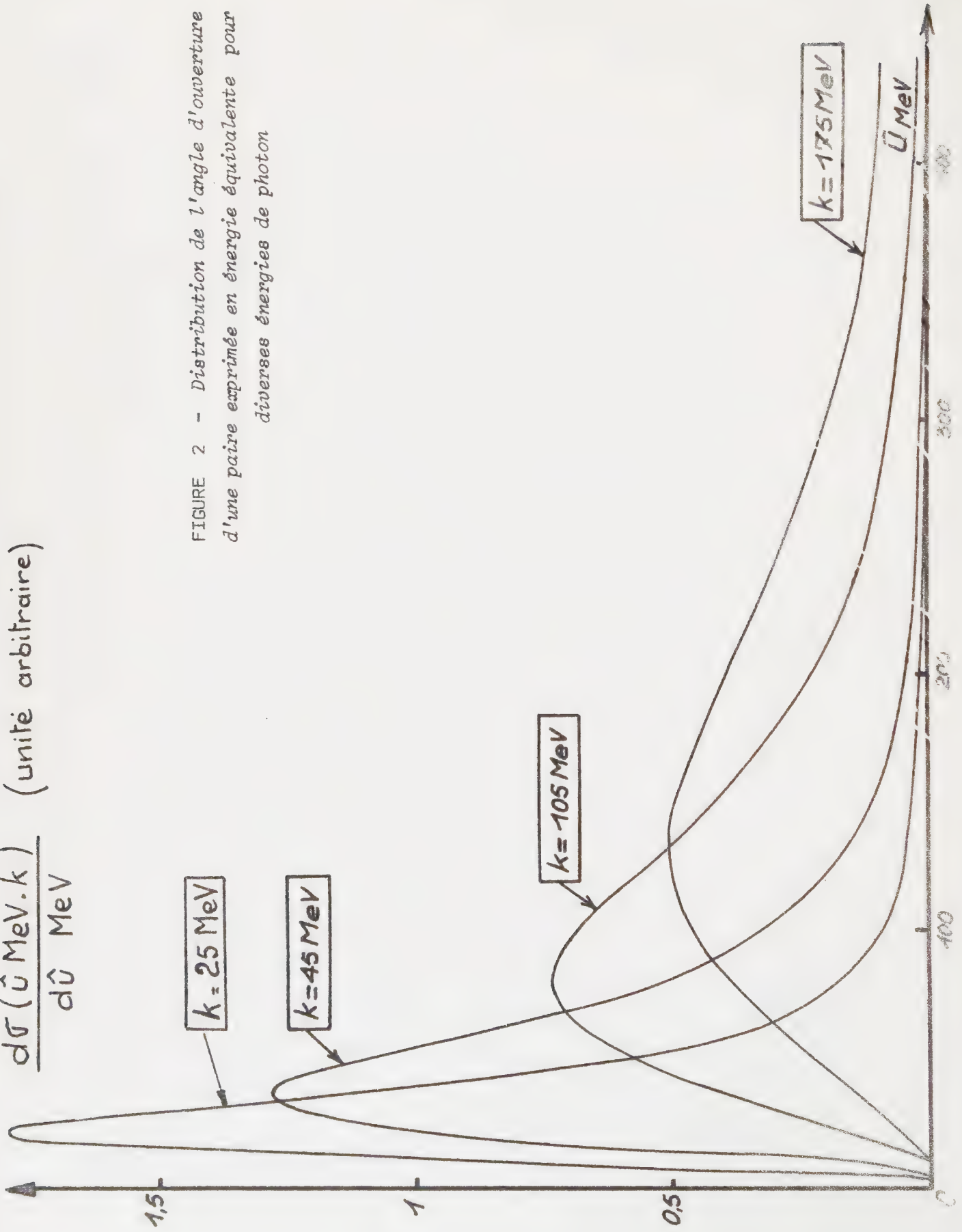


FIGURE 2 - Distribution de l'angle d'ouverture d'une paire exprimée en énergie équivalente pour diverses énergies de photon

Il faut souligner que la section efficace différentielle utilisée est une section efficace valable seulement pour les hautes énergies (E_+ , E_- , $k \gg m_0$). Cependant nous sommes amenés à l'utiliser : à notre connaissance il n'existe pas de formules analogues pour les basses énergies ; Olsen a remarqué cependant que même pour des photons de 6 MeV, la moyenne de $\mathcal{K}$ calculée est en très bon accord avec celle obtenue expérimentalement par Shopper⁽²⁾. L'erreur que nous commettons est alors une erreur par défaut introduite en négligeant les corrections de Coulomb, c'est-à-dire de l'ordre de $\left(\frac{Z}{137}\right)^2 \cdot \frac{\text{Log}(k)}{k}$ (soit une erreur de 2 à 3 % dans l'émulsion, pour $k = 10$ MeV).

Nous effectuons les intégrations de manière numérique par la méthode des trapèzes sur un ordinateur IBM 1620.

Les résultats sont normalisés à 15.460 paires de manière à les comparer aux résultats expérimentaux obtenus au Ch.VII). Les angles d'ouverture $\hat{u}$ sont exprimés en énergie équivalente.

Les courbes représentées à la Figure 2, représentent en unités arbitraires la variation de la section efficace différentielle en fonction de $\hat{u}_{\text{MeV}}$, pour différentes valeurs de k :

$$\frac{d(\hat{u}_{\text{MeV}}, k)}{d\hat{u}_{\text{MeV}}} = \int_0^1 \left\{ \frac{d^2 \mathcal{K}(\hat{u}, a, k)}{d\hat{u} da} \cdot \frac{d\mathcal{K}}{d\hat{u}_{\text{MeV}}} \right\} da \quad (8)$$

Nous avons normalisé les résultats à 15.460 paires ; nous pouvons cependant donner une valeur absolue approchée (à 50 ou 60 % près) du nombre de paires que nous aurions dû trouver dans le volume d'émulsion analysé ($0,15 \text{ cm}^3$). Ceci en tenant compte du nombre de photons : $n_p = 3,86 \cdot 10^4$ évalué précédemment.

Normalisation à 15460 paires

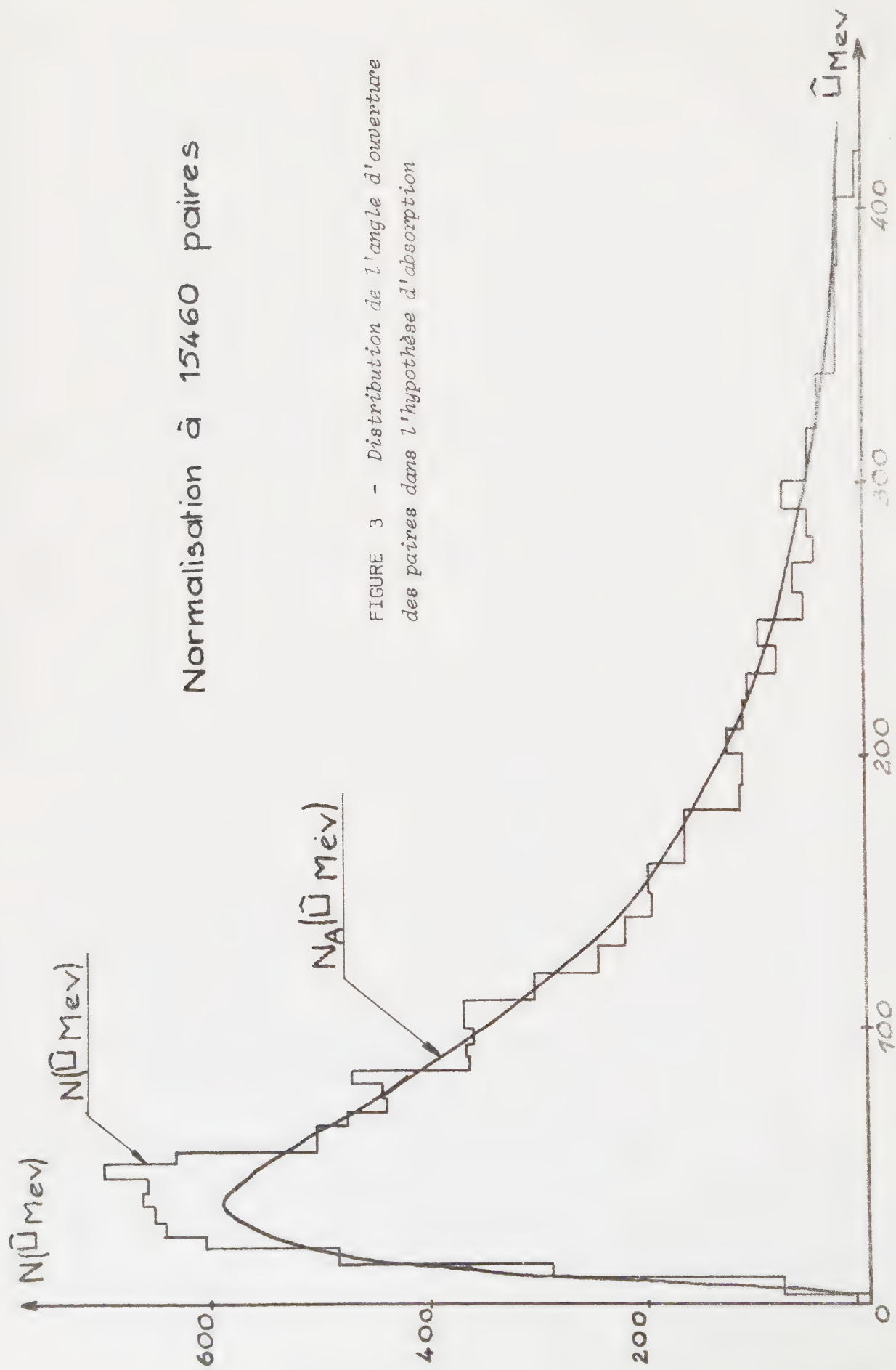
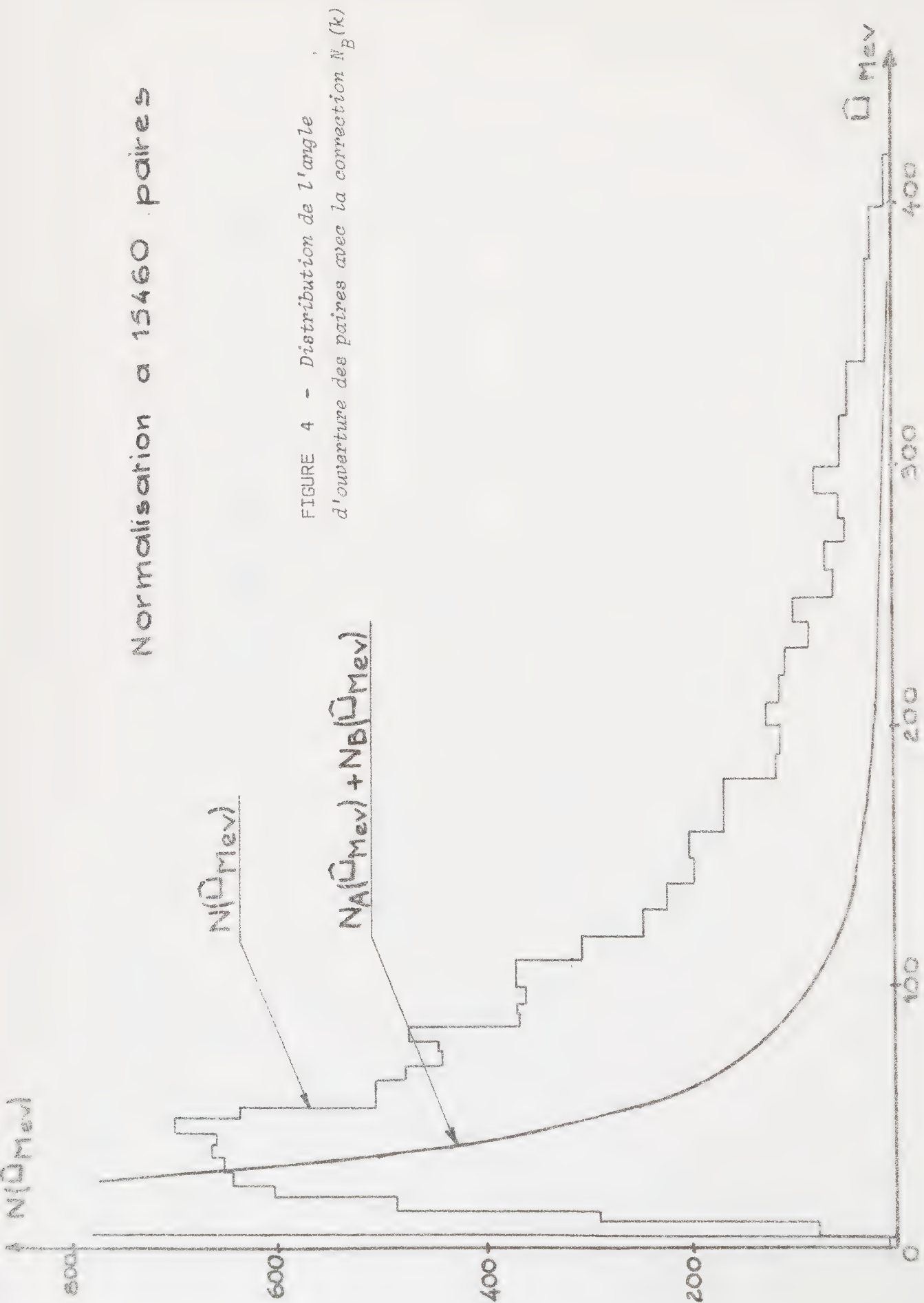
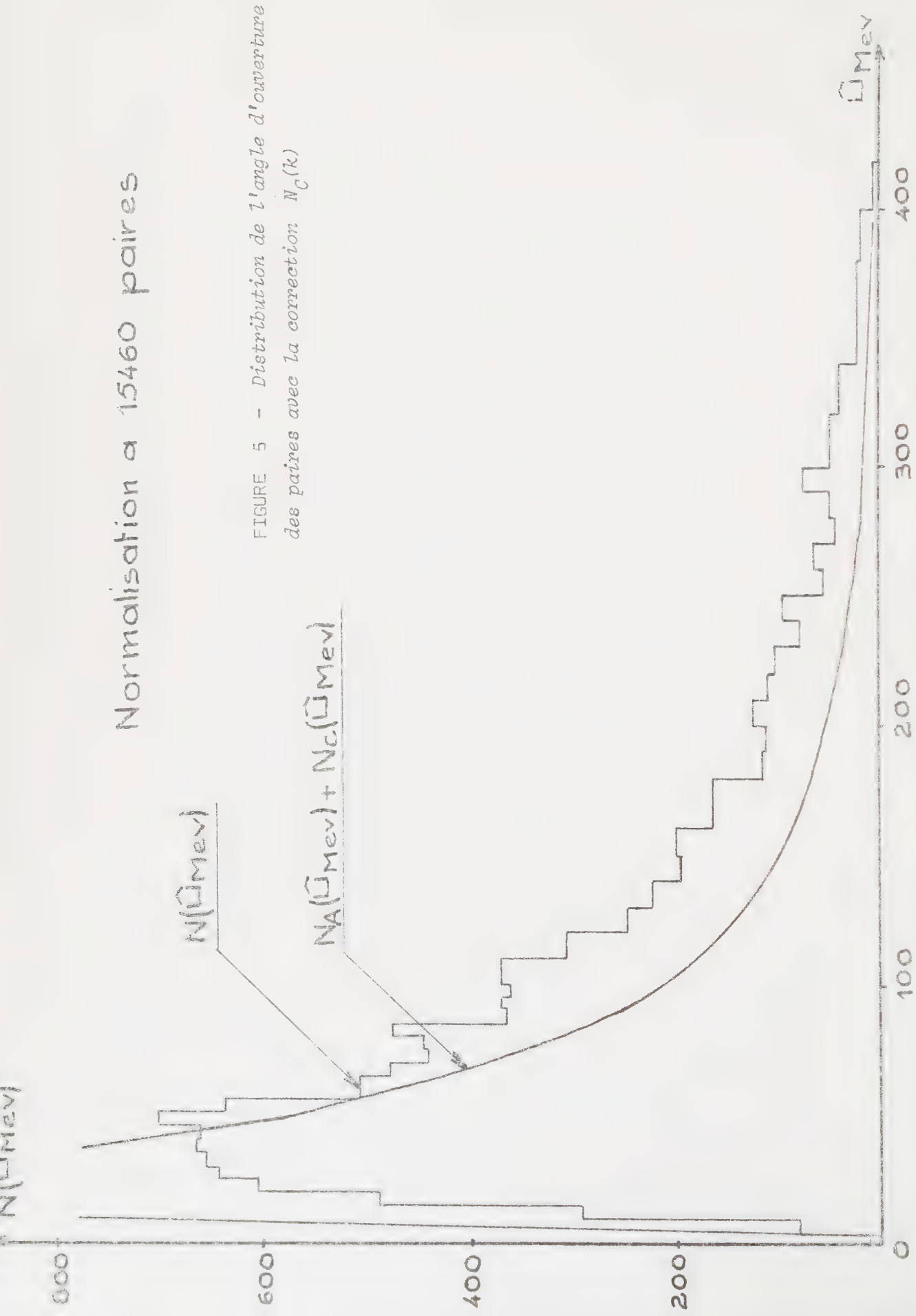


FIGURE 3 - Distribution de l'angle d'ouverture
des paires dans l'hypothèse d'absorption



Normalisation a 15460 paires

FIGURE 4 - Distribution de l'angle
d'ouverture des paires avec la correction $N_B(k)$



Nous devons obtenir dans les diverses hypothèses :

Absorption : $N_A(k) \longrightarrow 25.000$ paires

Correction B : $N_A(k) + N_B(k) \longrightarrow 500.000$ paires

Correction C : $N_A(k) + N_C(k) \longrightarrow 75.000$ paires

Les Figures 3 , 4 et 5 représentent respectivement, en regard des résultats expérimentaux $N(\hat{u}_{MeV})$, les distributions de l'angle d'ouverture correspondant au spectre de photons $N_A(k)$, $N_A(k) + N_B(k)$, $N_A(k) + N_C(k)$.

§ III - Conclusion

Nous constatons que seuls les résultats obtenus en considérant seulement l'absorption des photons $N_A(k)$ dans l'hydrure de lithium, concordent en forme et en nombre de paires trouvées (en effet le chiffre de 25.000 paires est approximatif). Nous sommes donc conduits à envisager les deux solutions suivantes :

a) ou bien les calculs ($N_B(k)$ et $N_C(k)$) de cascade électrophotonique effectués sont inexacts ;

b) ou bien la disposition géométrique du dispositif expérimental joue un rôle important dans ces calculs.

La validité de nos calculs peut être confirmée en les comparant (Fig. 6) à ceux de Messel, Crawford⁽³⁾. Ces auteurs ont en effet utilisé une technique de simulation (méthode de Monte Carlo) pour donner des résultats numériques, sous forme de tables à plusieurs entrées pour différents matériaux, relatifs au nombre de photons engendrés au bout d'une certaine épaisseur de matière par des électrons d'énergie déterminée. Ces calculs sont effectués en ne tenant compte du déplacement

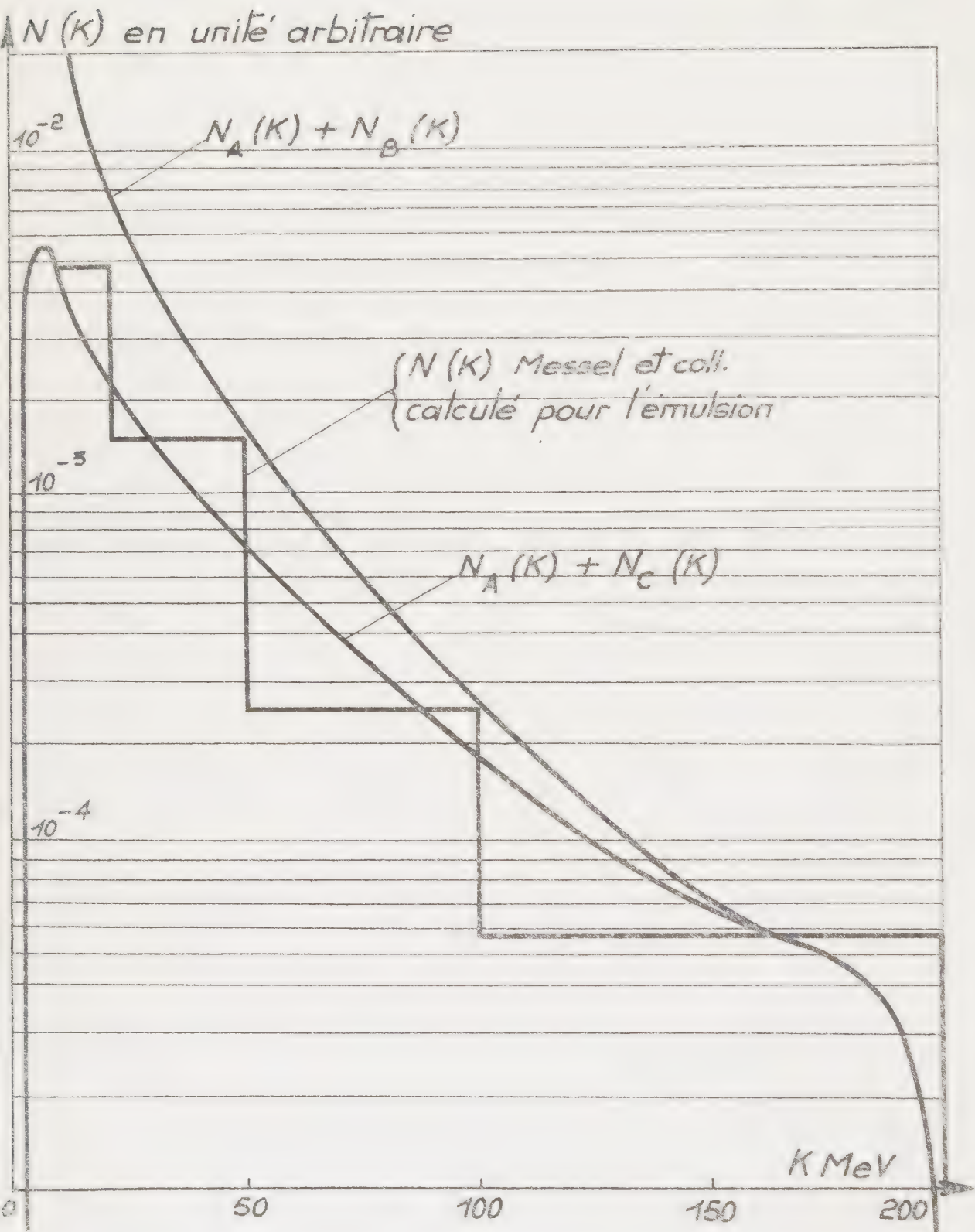


FIGURE 6 - Spectre de photons obtenu par Crawford et Messel

latéral de la cascade électrophotonique si ce n'est que pour les corrections aux longueurs de matériaux traversés. Nous avons à notre disposition quatre résultats relatifs à l'émulsion (matériaux pour lesquels les calculs ont été effectués et dont le nombre atomique est le plus bas). Nous avons interpolé les chiffres relatifs aux tables correspondant à 3 et 4 longueurs de radiation au nombre de longueurs de radiation de notre colonne d'hydrure de lithium. Nous avons fait figurer (Fig. 6) les quatre résultats que les auteurs donnent après avoir normalisé leur nombre de photons supérieurs à 100 MeV à celui de $N_A(k)$. Les résultats donnés sont compatibles avec ceux obtenus avec notre dernière correction $N_A(k) + N_C(k)$. La petite différence existant vers les basses énergies peut avoir différentes causes :

1. Le rapport "section efficace de matérialisation/section efficace Compton" est plus fort pour l'hydrure de lithium que pour l'émulsion ;
2. Nous avons négligé dans notre calcul les corrections d'ordre égal ou supérieur à 3 qui amènent un apport de photons de faible énergie.

Les calculs de cascade que nous avons effectués sont donc compatibles avec ceux dus à Messel et Crawford.

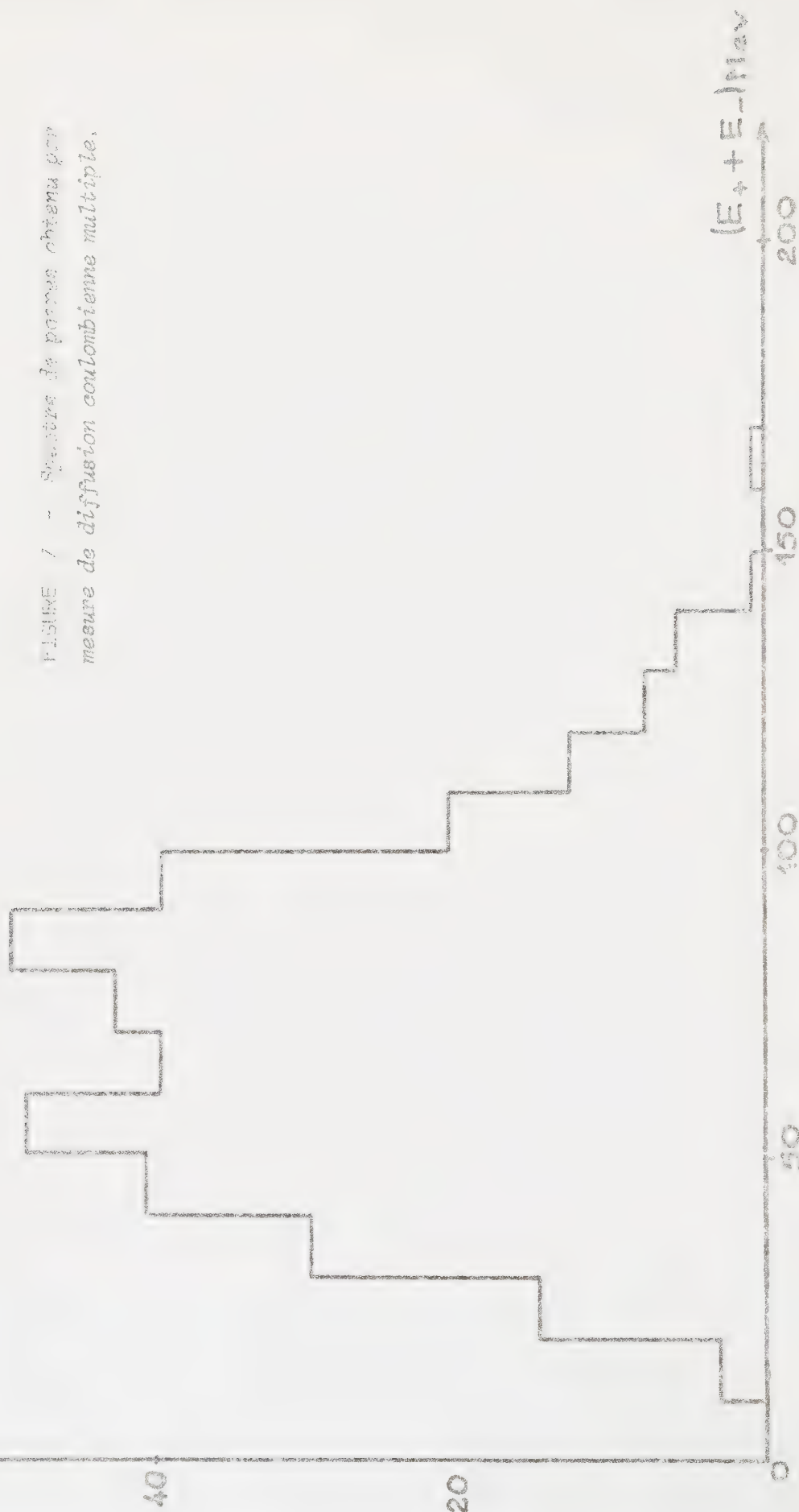
Nous sommes donc conduits à envisager la deuxième solution ; en effet, l'acceptance angulaire des collimateurs est plus faible que les angles d'émission des photons correspondant aux secondes générations de photons, correction $N_B(k)$ et $N_C(k)$; ces photons ne seront donc pas admis par le dispositif expérimental.

Nous pouvons en déduire la conclusion suivante : tout calcul de cascade appliqué au dispositif expérimental de faible acceptance angulaire doit être effectué en tenant compte de l'ouverture angulaire de la suite des événements

380 pairs

FIGURE 1 - Spectre de paires obtenu par mesure de diffusion coulombienne multiple.

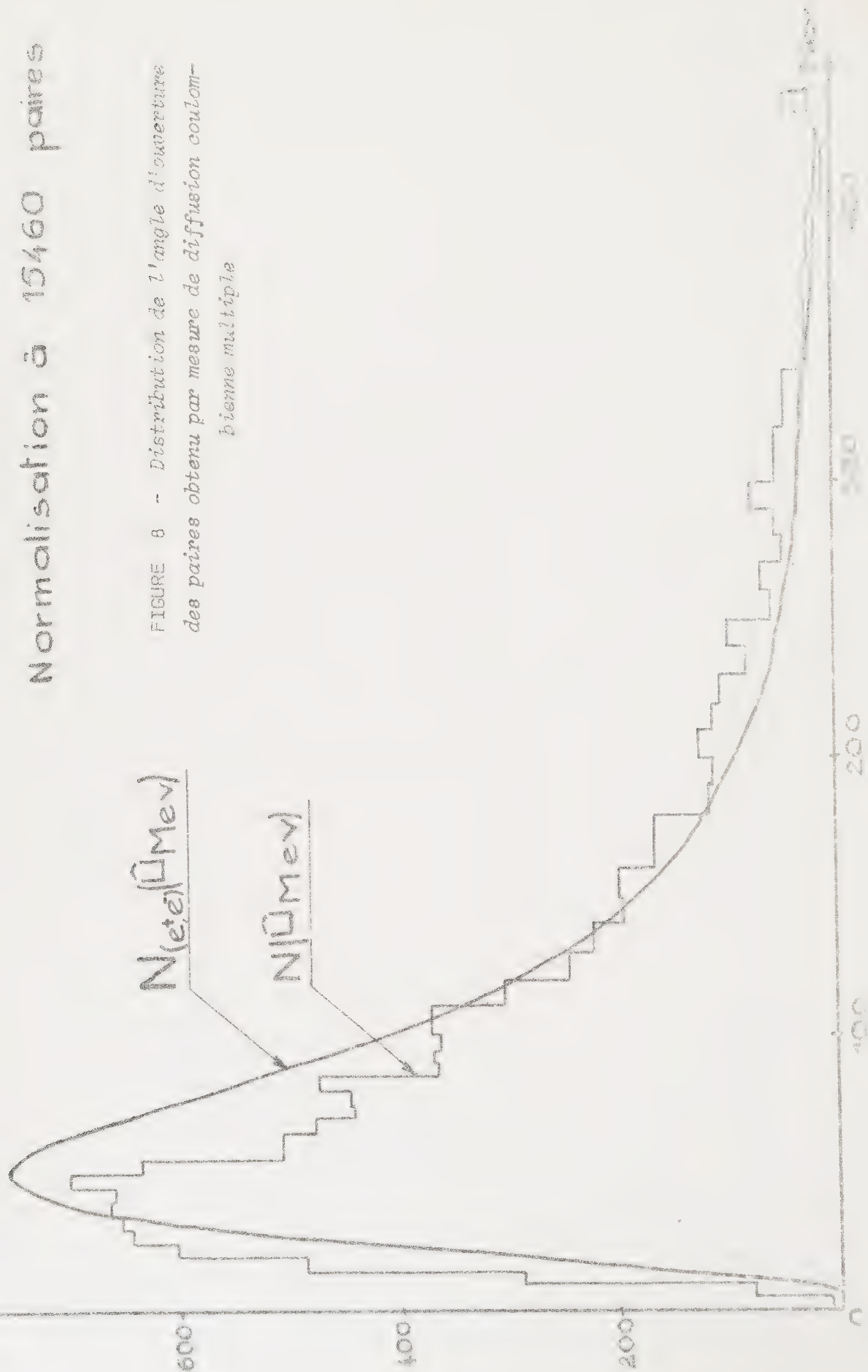
$N(E_+ + E_-)$



$(E_+ + E_-) \text{ MeV}$

Normalisation à 15460 paires

FIGURE 8 - Distribution de l'angle d'ouverture
des paires obtenu par mesure de diffusion coulomb-
bienne multiple



qui forment cette cascade. Mais en première approximation, nous pouvons, lorsque l'ouverture des collimateurs est très faible et lorsque les distances sont élevées (comme dans notre cas) admettre que le matériau où se produit la cascade n'intervient que par un effet d'absorption ; le développement de la cascade peut ne pas être pris en considération.

Nous voyons qu'avec de telles hypothèses nous obtenons dans notre cas un écart inférieur à 10 % dans la région de 20 à 60 MeV, entre les résultats expérimentaux et les spectres d'ouverture angulaire "en énergie équivalente".

Remarque - Nous donnons (Fig. 7) enfin les résultats $N_{(e^+, e^-)}(k)$ de mesure d'énergie de paires obtenues par une série de mesures de diffusion coulombienne de 380 événements (e^+, e^-) . Ces mesures ont été effectuées sur une émulsion Ilford G 5 de $(400 \mu, 150 \times 150 \text{ mm}^2)$ exposée parallèlement à l'axe du faisceau précédemment décrit. La Figure 8 représente la distribution théorique de l'angle d'ouverture de ces paires (résultats normalisés à 15.460). Le résultat a été obtenu par une convolution analogue à celle de la formule (7), la fonction de distribution de $N_{(e^+, e^-)}(k)$ étant alors normalisée à l'unité

$$N_{(e^+, e^-)}(\hat{u}) \hat{u} = \int_0^{E_0} \int_0^1 \frac{\left\{ \frac{d^2 \mathcal{K}(\hat{u}, a, k, a)}{d\mathcal{K} da} \cdot \frac{d\mathcal{K}}{dk} \cdot \Delta \hat{u} \right\}}{\int_0^1 \frac{d^2 \mathcal{K}(\hat{u}, \xi, k, \xi)}{d\mathcal{K} d\xi} \cdot \frac{d\mathcal{K}}{d\hat{u}} d\xi} N_{(e^+, e^-)}(k) dk d\hat{u} \quad (9)$$

Le résultat obtenu est alors en désaccord total avec les résultats expérimentaux et théoriques précédents. Les erreurs systématiques dans la recherche des événements en particulier l'oubli de paires de faible énergie jouant un rôle important dans cette exposition parallèle. Cette remarque traduit une fois de plus le

Références Bibliographiques

1. L.T. SCHIFF : Phys. Rev. 70, 87 (1946)
2. H. SCHOPPER : en cours de publication
3. D.F. CRAWFORD and H. MESSEL : Nuclear Phys. 61, 145 (1965)

C O N C L U S I O N

Le travail que nous venons de décrire montre que l'on peut calculer le spectre en énergie d'un faisceau de photons durci par absorption dans l'hydruure de lithium ; et ceci d'autant plus facilement que la géométrie de l'appareillage définit des angles solides plus faibles.

Les calculs simples de dégénérescence dans la colonne d'hydruure de lithium, que nous avons effectués par corrections successives conduisent à des résultats en accord avec ceux qui utilisent une technique plus évoluée de simulation (qui demande une mathématique plus complexe et des ordinateurs extrêmement plus puissants), et cela dans le cas pratique où nous nous sommes placés de trois ou quatre longueurs de radiation. De plus, les corrections successives employées prennent des significations physiques simples et permettent de ce fait une meilleure compréhension du phénomène.

Notre méthode expérimentale 'perpendiculaire' telle que nous l'avons mise au point s'est révélée être extrêmement efficace : Elle conduit à une plus grande sûreté dans les mesures tout en permettant une vitesse accrue dans la recherche des événements. De plus, elle permet l'élimination des erreurs systématiques de recherche et de mesure.

Nous voudrions insister sur la méthode de correction de diffusion coulombienne multiple que nous avons imaginée et mise au point. Elle s'est avérée être très supérieure à celle utilisée jusqu'à présent. Rappelons que c'est l'évolution des spectres dans le passage d'un plan de mesure à l'autre

qui nous permet de remonter à l'ouverture angulaire initiale. Il faut signaler ici qu'une telle méthode pourrait s'appliquer à des problèmes très différents dans la mesure où les lois de variation du phénomène parasite qui se superposent au phénomène initial sont des fonctions connues de la longueur traversée.

L'accord des résultats expérimentaux avec le résultat de la convolution de la section efficace différentielle en ouverture angulaire donné par Olsen et du spectre $N_A(k)$ (d'absorption seule) montre que la formule établie par cet auteur est valable pour un spectre continu de photons jusqu'à des énergies relativement fortes (200 MeV).

Une des caractéristiques importantes de nos calculs est que nous n'avons jamais supposé l'équipartition des énergies des électrons, ce qui nous a conduit à effectuer dans tous les cas l'intégration sur la quantité $a = \frac{E_+}{k}$. Cette condition nous paraît absolument nécessaire : ainsi que nous l'avons fait remarquer au Chapitre I, l'hypothèse de l'équipartition doit introduire des erreurs systématiques importantes.

Nous avons montré que l'utilisation des émulsions photographiques nucléaires présente un très grand intérêt pour l'étude des interactions des photons avec la matière. En effet, elle permet une visualisation de l'ensemble du phénomène et elle donne au physicien la possibilité de mesurer avec précision les très courtes distances et les angles caractéristiques de ces réactions.

Enfin ces méthodes expérimentales sont directement applicables à l'étude des phénomènes plus rares, tels que matérialisation des photons dans ...

champ des électrons atomiques (triplet). Des publications récentes

(J. CASTOR, J. AUGERAT et J. BERTHOT^{*}) (J. AUGERAT, J. CASTOR et P.Y.BERTIN^{**})

basées sur notre méthode montrent tout l'intérêt de celle-ci. On peut aussi envisager de l'utiliser pour tenter de mettre en évidence des phénomènes plus problématiques (multiplets d'ordre supérieur par exemple).

* C.R. Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 646-649 (28 février 1966)

** C.R. Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 835-837 (21 mars 1966)

Deuxième Thèse

" Paramètres de Stokes - Application à l'optique physique et quantique
Etudes de cohérence"

VU ET APPROUVE

Clermont-Fd, le 20 Mai 1966

Le Doyen,

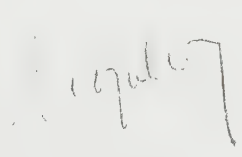

M. ROQUES

N° 41/66

VU ET PERMIS D'IMPRIMER

Clermont-Fd, le 27 MAI 1966

LE RECTEUR DE
L'ACADEMIE DE CLERMONT-FD


E. LAPALUS

